

Control De Sistema Lineales



El objetivo de este capítulo es demostrar la metodología del control de modos deslizantes para sistemas lineales. Reduciendo el sistema de ecuaciones de una forma regular, el cual es un paso preliminar en cualquier procedimiento de diseño, el núcleo de la idea es usar los métodos de la teoría de control para reducir el orden de las ecuaciones empleando diferentes métodos para implementar los modos deslizantes con la dinámica deseada

5.1 lugar de eigenvalores

Cuando comenzamos con los convencionales problemas de la teoría de control lineal: el lugar de los eigenvalores en un sistema lineal multidimensional invariante en el tiempo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.1.1)$$

Donde x y u son vectores de estado y control de dimensión n y m , respectivamente, A y B son matrices constantes, donde el $\text{Rango}(B)=m$, se asume que el sistema puede ser controlable.

Para cualquier sistema controlable existe una retroalimentación lineal $u=Fx$ (F existe como una matriz constante) tal que los eigenvalores del sistema del sistema retroalimentado, ej. Matriz $A+BF$, toma los valores deseados y da como resultado, las propiedades dinámicas deseadas del sistema. (Kwakernaak y Sivan, 1972)

Nótese que los eigenvalores pueden ser resueltos ajustándose al control de modos deslizantes tratándose como un sistema de orden reducido. Como demostración en la sección 3.3 el sistema llega a ser simple para sistemas de forma regular. Dado que el $\text{rango}(B)=m$, de la matriz B en (5.11) puede ser separada (luego ordenando las componentes de los vectores de estado)

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

donde $B_1 \hat{I} \hat{A}^{(n-m) \times n}$, $B_2 \hat{I} \hat{A}^{m \times m}$ con $\det B_2 \neq 0$ la transformación coordinada no singular

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Tx \quad T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0 & B_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

reduciendo el sistema de ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2) a la forma regular:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u\end{aligned}\quad (5.1.4)$$

Donde $x_1 \hat{I} \hat{A}^{(n-m)}$, $x_2 \hat{I} \hat{A}^m$ y A_{ij} son matrices constantes para $i, j=1,2$.

La controlabilidad de (A, B) para el par (A_{11}, A_{22}) también es controlable (Utkin y Young, 1978) manejaron x_2 como control intermediario de m -dimensión del primer subsistema controlable de $(n-m)$ -dimensión (5.4), todos $(n-m)$ -eigenvalores pueden ser asignados arbitrariamente para una propia selección de la matriz C en

$$x_2 = -Cx_1$$

para proveer la dependencia deseada entre las componentes x_1 y x_2 del vector de estado, el modo deslizante puede ser implementado en la variable

$$s = x_2 + Cx_1 = 0 \quad (5.1.5)$$

Donde $s^T = (s_1, \dots, s_m)$ es la diferencia entre los valores deseados y los reales de x_2 , después del empezar el modo deslizante, el movimiento es gobernado por un sistema de orden reducido con los eigenvalores deseados.

$$\dot{x}_1 = (A_{11}x_1 + A_{12}C)x_1 \quad (5.1.6)$$

Para una parte de control discontinuo lineal.

$$u = -(\alpha |x| + d) \text{sign}(s) \quad (\alpha \text{ y } d \text{ constantes positivas}) \quad (5.1.7)$$

Con, $\sin g(s)^T = [\sin g(s_1), \dots, \sin g(s_m)]$ Calcular la derivada respecto al tiempo de $\dot{V} = \frac{1}{2} s^T s$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s^T ((CA_{11} + A_{21})x_1 + (CA_{12} + A_{22})x_2) - (\alpha |x| + d)|s| \\ &\leq |s| |(CA_{11} + A_{21})x_1 + (CA_{12} + A_{22})x_2| - (\alpha |x| + d)|s|\end{aligned}$$

Es evidente que existe un α tal que, para cualquier d , la derivada respecto al tiempo \dot{V} es negativa; Esto valida la convergencia del vector de estado para la variable $s=0$ en (5.1.5) y la existencia del modo deslizante con la dinámica deseada, el intervalo de tiempo antes del cambio deslizable puede ser incrementado o decrementado con los parámetros α y d del control (5.1.7).

Un resultado similar puede ser obtenido en el sistema con la siguiente unidad de control (sección 3.5):

$$u = -(\alpha |x| + d) \frac{s}{\|s\|} \quad \|s\| = (s^T s)^{1/2} \quad (5.1.8)$$

El cuál experimenta discontinuidades en la variable $s=0$ en contraste al control (5.1.7) con puntos de discontinuidad en cada superficie $s_i=0$ ($i=1, \dots, m$). La derivada respecto al tiempo de v para el sistema (5.1.4) con el control (5.1.8) es de la forma

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s^T ((CA_{11} + A_{21})x_1 + (CA_{12} + A_{22})x_2) - (\mathbf{a}|x| + \mathbf{d})\|s\| \\ &\leq \|s\|((CA_{11} + A_{21})x_1 + (CA_{12} + A_{22})x_2) - (\mathbf{a}|x| + \mathbf{d})\|s\|\end{aligned}$$

De nuevo, para un α tal que \dot{V} es negativa para cualquier δ y para alcanzar el estado de la variable $s=0$ después de un intervalo de tiempo finito.

Si el sistema no es reducido a la forma regular, el múltiplo $s=Cx$ (C existe como una matriz $m \times (n-m)$) que pueden ser seleccionados en términos del sistema original (5.1.1) basado en la aproximación de un método de control equivalente y las condiciones para la existencia de un modo deslizante (sección 2.3 y 2.4) asumiendo el modo deslizante en $s=0$ que tiene las propiedades dinámicas deseadas y la matriz CB no es singular, entonces

$$\dot{s} = CAx + CBu$$

Y la derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov $V = 1/2 s^T$ es de la forma

$$\dot{V} = s^T CAx + s^T CBu$$

Si la matriz $(CB + (CB)^T)$ es definida positiva, entonces el control es discontinuo.

$$u = -M(x) \text{sign}(s)$$

con $M(x) = (\mathbf{a}|x| + \mathbf{d})$ y con a lo suficientemente alta pero finita y un valor arbitrario de d llevan al modo deslizante después de un intervalo de tiempo finito (la demostración es similar a uno de los sistemas no lineales de la sección 3.5) para una matriz arbitraria CB , el control puede ser seleccionado en conformidad con el método de la sección 3.2:

$$u = U(x) \text{sign}(s^*) \quad s^* = (CB)^T s$$

la derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov elegida $V = 1/2 s^T$ para el sistema con $U(x) = (\mathbf{a}|x| + \mathbf{d})$,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (s^*)^T (CB)^{-1} CAx - |s^*|(\mathbf{a}|x| + \mathbf{d}) \\ &\leq |s^*|((CB)^{-1} CAx - |s^*|(\mathbf{a}|x| + \mathbf{d}))\end{aligned}$$

Si es definida negativa para una a lo suficientemente alta y una d arbitraria, esta bien.

Finalmente, es interesante notar que con unidades de control no lineal, la existencia de una condición de un modo deslizante, puede ser alcanzado por medio de criterios de estabilidad algebraicos implementados para sistemas lineales, ciertamente, si CB es una matriz de Hurwitz entonces la ecuación de Lyapunov $(CB)P + P^T(CB) = -I_m$ tiene una

solución definida positiva $P > 0$, y la derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov seleccionada $V = 1/2 s^T P s$, $P > 0$, en el sistema con control $u = M(x)s/\|s\|$ puede ser encontrado como

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s^T P A x + M(x) s^T P (C A) \frac{s}{\|s\|} \\ &= s^T P A x + M(x) s^T \frac{P(CB) + (CB)^T P}{2} \frac{s}{\|s\|} \\ &\leq \|s\| \|P A x\| \frac{1}{2} M(x) \|s\|\end{aligned}$$

Si la función $M(x) = (a|x| + d)$ entonces \dot{V} es negativa y el modo deslizante ocurre después de un intervalo de tiempo finito (sección 3.5).

5.2 sistemas invariantes

Uno de los muchos objetivos de los diseños de sistemas de control retroalimentados es reducir la sensibilidad con respecto a los disturbios y las variaciones de parámetros de la planta como se ve en la sección 3.4, los modos deslizantes en cualquier múltiplo son invariantes a estos factores ya que estos actúan satisfaciendo las condiciones en un espacio de control (3.4.4) y (3.4.5). para sistemas lineales

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Bu + Qf(t) \quad f(t) \in \mathcal{R}' \quad (5.2.1)$$

Las condiciones de invariancia están formuladas en un sistema de términos y matrices de entrada (Drazenovic, 1969): los modos deslizantes en cualquier múltiplo son invariantes respecto a la variación de parámetros $\Delta A(t)$ y el vector de perturbación $f(t)$ en el caso de que

$$\Delta A \in \text{rango}(B) \quad \text{y} \quad Q \in \text{rango}(B)$$

o existen matrices Λ_A y Λ_Q (constantes o variantes en el tiempo) tal que

$$\Delta A = B \Lambda_A \quad Q = B \Lambda_Q$$

si las condiciones (5.2.2) se mantienen, la forma regular (5.2.1) es similar a (5.1.4)

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + \Lambda_A x + \Lambda_Q f(t)$$

Asumiendo que las variaciones de los parámetros de la planta y un sobresalto del vector de perturbación $\|\Lambda_Q f(t)\| \leq f_0$ son conocidas, $s=0$ pueden hacerse con un múltiplo deslizante en el sistema con control (5.1.7) bajo las condiciones adicionales

$$d \geq f_0 \quad (5.2.3)$$

una similar aproximación puede ser aplicada para desacoplar sistemas interconectados

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l A_{ij} x_j + B_i u_i \quad i = (1, \dots, l)$$

Donde $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ Y A_i, A_{ij} Y B_i Son matrices constantes

Los términos de interconexión pueden ser manejados como perturbaciones y las condiciones invariables puede ser reformuladas para cada subsistema $A_{ij} \in \text{rang}(B_i)$.

Control discontinuo en cada i sistema.

$$u_i = -(\mathbf{a}_i + \mathbf{d}_i) |x| \text{sign}(s_i)$$

$$x^T = x_1^T, \dots, x_l^T,$$

$$s_i = C_i x_i,$$

$$C_i = \text{constante},$$

$$s_i \in \mathbb{R}^{m_i}$$

Con valores de \mathbf{a}_i Lo suficientemente altos pero finitos forzamos el modo deslizante en la variable $s_i=0$ gobernado por una ecuación de orden $(n \times m)$ la cual no depende del estado de los otros subsistemas, la dinámica de cada subsistema puede ser diseñada con una propia selección de matrices C_i en la ecuación de la variable deslizante.

5.3 compensadores dinámicos en modos deslizantes

El valor de δ puede exceder el valor estimado del vector de perturbación (5.2.3) en modo discontinuo (5.1.7) diseñando para rechazar perturbaciones, para amortiguar la acción de control, esto puede ser deseable para la amplitud del control del modo deslizante si la magnitud de la [perturbación decrece. Normalmente las perturbaciones no es posible medirlas, el cual es el principal obstáculo para diseñar un sistema de control con las propiedades mencionadas. No obstante, es formulado, y la tarea es resoluble preferiblemente con Fuzzy con nociones previas de la clase de perturbación disponible.

Si tenemos la perturbación en la ecuación de movimiento (5.2.1) con $\mathbf{D}\mathbf{A}=0$ y satisface la condición de invariancia (5.2.2) y dejamos a \mathbf{Q} como una matriz constante. Entonces el sistema puede ser representado en la forma regular.

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \quad (5.3.1)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + \Lambda_q f(t)$$

Y la ecuación de modo deslizante en el múltiplo $s=Cx_1+x_2=0$ (5.1.6), no depende del vector de perturbación. Asumiendo que los componentes del vector $f(t)$ no pueden ser medidas y un “modelo de perturbación” es tomado en la forma de un sistema dinámico lineal variante en el tiempo.

$$f^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1} q_i(t) f^{(i)} = 0 \quad (5.3.2)$$

Los coeficientes escalares $q_i(t)$ Pueden variar arbitrariamente alrededor de ciertos intervalos.

$$|q_i(t)| \leq J_{i0} \quad (5.3.3)$$

Si asumimos que ninguna condición inicial ni tampoco funciones $q_i(t)$ Son mensurables y solo los rangos J_{i0} son conocidos. La ecuación (5.2.3) encierra una amplia variedad de clases de perturbaciones. Para $k=2$ están incluyen funciones exponenciales y armónicas, polinomios de cualquier potencia finita (comenzando desde un cierto tiempo), todos los productos de esas funciones, etc.

El controlador esta diseñando como un sistema dinámico con control u como una salida.

$$u^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i u^{(i)} = v \quad (5.3.4)$$

Donde d_i son coeficientes escalares constantes cuya selección esta dictada solo por la conveniencia de la implementación.

La entrada v puede ser seleccionada como parte de la función lineal del controlador y el sistema de estado. Cada control m del sistema tiene un elemento de k -ésimo orden dinámico, el orden total del sistema es igual a $n+mk$. El estado coordinado del sistema dinámico adicional puede ser medido.

Permitiéndonos escribir las ecuaciones de movimiento del sistema extendido en el espacio consistiendo este de x_1, x_2, \dots, x_{k+2} , si

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_{i+1} \\ (i &= 2, \dots, k+1) \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Dado que $\dot{x}_2 = x_3$ y deduciendo de la segunda ecuación (5.3.1) que

$$u = x - A_{21}x_1 - A_{22}x_2 - \Lambda_Q f \quad (5.3.6)$$

Diferenciando (5.3.6) k veces y substituyendo en el lado derecho de (5.3.1), (5.3.5) y (5.3.6) derivada respecto al tiempo x_i y u , obtenemos

$$u^{(i)} = x_{i+3} + \sum_{j=1}^{i+2} A_j^i x_j - \Lambda_Q f^{(i)} \quad (i = 1, \dots, k-1) \quad (5.3.7)$$

$$u^{(k)} = \dot{x}_{k+2} + \sum_{j=1}^{k+2} A_j^k x_j - \Lambda_Q f^{(k)} \quad (5.3.8)$$

Donde A_j^i y A_j^k Son matrices constantes. Por substitución de los valores de las derivadas $u^{(i)}$ de (5.3.7) y (5.3.8) en (5.3.4) y reemplazando la k -ésima derivada del vector de perturbación en conformidad con (5.3.2) por una combinación lineal de vectores f, \dots, f_{k-1} obtenemos

$$\dot{x}_{k+2} = x_{i+3} + \sum_{i=1}^{k+2} A_i x_i + \sum_{i=0}^{k-1} (d_i - q_i(t)) \Lambda_Q f^{(i)} + v \quad (5.3.9)$$

donde A_i son matrices constantes

Teniendo en mente que los vectores $\Lambda_Q f^{(i)}$ ($i=0, \dots, k-1$) pueden ser calculados de la forma (5.3.7), la ecuación (5.3.9) puede representarse como

$$\dot{x}_{k+2} = \sum_{i=1}^{k+2} \bar{A}(t)_i x_i + \sum_{i=0}^{k-1} (d_i - q_i(t)) u^{(i)} + v \quad (5.3.10)$$

Donde $\bar{A}(t)_i$ son matrices dependientes de $q_i(t)$, y subsecuentemente del tiempo.

anotación de introducción

$$\bar{x}^T = [\bar{x}_1^T \bar{x}_2^T], \bar{x}_1^T = [\bar{x}_1^T \dots \bar{x}_{k+1}^T], \bar{x}_2 = x_{k+2}, \bar{u}^T = [u^T \dot{u}^T \dots (u^{(k-1)})^T]$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (d_i - q_i(t)) u^{(i)} = q(t) \bar{u}$$

$$q = [(d_i - q_i(t)) \dots (d_i - q_{k-1}(t))]$$

y escribiendo la primera ecuación en (5.3.1), en la ecuación (5.3.5) y la ecuación (5.3.10) como

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}_1}{dt} &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 \\ \frac{d\bar{x}_2}{dt} &= \bar{A}_{21}(t)\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}(t)\bar{x}_2 + \mathbf{q}(t)\bar{u} + v\end{aligned}\quad (5.3.11)$$

Donde \bar{A}_{11} y \bar{A}_{12} son matrices constantes; $\bar{A}_{21}(t)$, $\bar{A}_{22}(t)$ y $\mathbf{q}(t)$ son matrices variantes en el tiempo con elementos definidos donde los coeficientes de $\mathbf{q}_i(t)$ en la ecuación (5.3.3) están también definidos.

El sistema (5.3.11) está en forma regular y controlado por \bar{x}_2 como un control intermediario en el primer bloque, la dinámica deseada puede ser asignada con una propia selección de la matriz C en $\bar{x}_2 = C\bar{x}_1$. entonces siguiendo la metodología de la sección 3.3, el modo deslizante es forzado en el múltiplo $s = \bar{x}_2 + C\bar{x}_1 = 0$ por medio del control

$$v = -(\mathbf{a}(|\bar{x}_1| + |\bar{x}_2| + |\bar{u}|) + \mathbf{d}) \sin g(s) = 0 \quad (5.3.12)$$

y por supuesto la derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov aspirante $V = 1/2 s^T s$

$$\dot{V} = s^T ((C\bar{A}_{11} + \bar{A}_{21})\bar{x}_1 + (C\bar{A}_{12} + \bar{A}_{22})\bar{x}_2 + \mathbf{q}\bar{u}) - (\mathbf{a}(|\bar{x}_1| + |\bar{x}_2| + |\bar{u}|) + \mathbf{d})|s|$$

Es negativo para un suficientemente alto, pero finito valor de α y cualquier δ . después de un intervalo finito de tiempo, el modo deslizante controlado por

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}C)\bar{x}_1 \quad (5.3.13)$$

Puede pasar con la deseada dinámica y propiedades de invariancia con respecto a las perturbaciones.

El objetivo del diseño fue decrementar la magnitud del control con el decrecimiento de las perturbaciones sin medición de las mismas. Este es el caso para nuestro sistema: en la solución para (5.1.13), $\bar{x}_1(t)$ y $\bar{x}_2(t)$ tienden a cero, la función $u^{(i)}$ tiende a $-\Lambda_Q f^{(i)}$ (5.3.7) dado que $u^{(i)}$ $i=1, \dots, (k-1)$ son componentes del vector \bar{u} , el control v (5.3.12) decrece con las perturbaciones. La salida del sistema dinámico adicional u es una función continua y tiende a $-\Lambda_Q f$, el cual gobierna el rechazo de la perturbación.

En sistemas reales, frecuentemente no es necesario introducir un sistema dinámico adicional; esta parte puede desempeñarse con los actuadores que tienen salidas comúnmente medibles, entonces, el control diseñando es para la entrada del actuador y su magnitud depende de las perturbaciones y sus derivadas.

Ejemplo 5.1

El método de rechazo de perturbaciones puede ser ilustrado con un sistema de segundo orden donde la planta y el actuador son integradores (Fig. 5.1), una perturbación externa $f(t)$ es aplicada a la planta y no es accesible para ser medida. El control u está diseñando como una parte de la función lineal del valor regulado $x=x_1$ que puede ser reducido a cero pero también la salida y del actuador. entonces el comportamiento de la planta está gobernado por de primero y segundo orden, respectivamente:

$$\begin{aligned}u &= x_2 - f \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v - f\end{aligned}\quad (5.3.14)$$

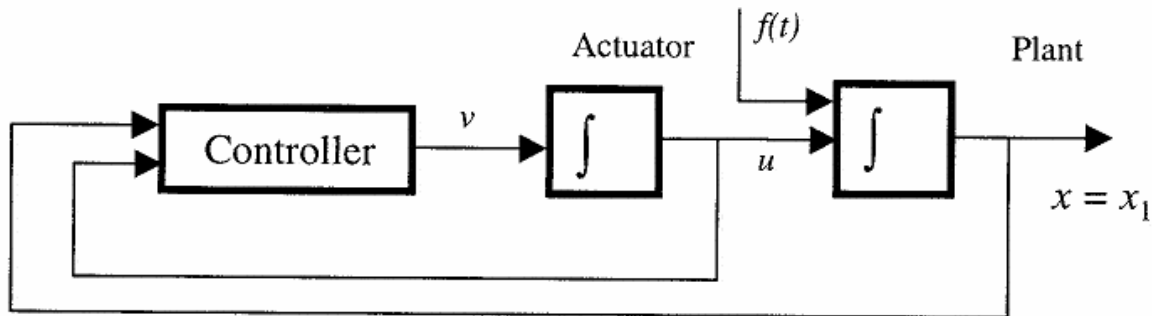


Figura 5.1 compensador dinámico de modo deslizante en un sistema de segundo orden

seleccionando el control para el sistema (5.3.14) en forma similar a (5.3.12)

$v = -(\mathbf{a}|\bar{x}_1| + \mathbf{b}|u|) + \mathbf{d} \operatorname{sign}(s)$, $s = x_2 + Cx_1$ Con \mathbf{a} , \mathbf{b} y $c > 0$ siendo coeficientes constantes. el control puede ser escrito como

$$v = -\mathbf{y}x_1 - \mathbf{y}_u u - \mathbf{d} \operatorname{sign}(s)$$

donde

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \operatorname{sign}(x_1 s)$$

$$\mathbf{y}_u = \mathbf{b} \operatorname{sign}(us)$$

el sistema (5.3.14) esta controlado en parte por ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\mathbf{y}x_1 - \mathbf{y}_u x_2 - \mathbf{d} \operatorname{sign}(s) + \mathbf{y}_u f + \dot{f}$$

Así fue visto para un sistema similar de segundo orden sin perturbaciones en la sección 2.1 (con $f(t) \equiv 0$), los coeficientes de control pueden ser elegidos tal que el estado sea alcanzando la conmutación de línea. Y el modo deslizante es forzado a alcanzar cada punto de esta línea, después de un intervalo finito de tiempo, el estado tiende a cero en modo deslizante con la ecuación de movimiento $\dot{x} + cx = 0$. Los planos de estado de dos estructuras lineales inestables del sistema se muestran en la figura 1.9 y el plano de estado del sistema asintóticamente estable con estructura variable se muestra en la figura 1.10, si $f(t) \neq 0$, son puntos singulares ($\dot{x} = \dot{x}_2 = 0$) para cada una de las cuatro estructuras lineales, correspondientes a las cuatro combinaciones de $\pm\alpha$ y $\pm\beta$ son desplazadas de la original. Las magnitudes y signos de los desplazamientos dependen de los coeficientes α , β y las perturbaciones $f(t)$. La figura 5.2 muestra en forma separada a la derecha y a la izquierda de los semiplanos del sistema del plano de estado para el área $|x_2| \leq f(t)$, donde $\operatorname{sing}(u) = -\operatorname{sing}(f(t))$ por virtud de la ecuación de planta. Los actuadores de primer orden toman parte en el sistema dinámico adicional (5.3.4), de esta manera la perturbación $f(t)$ es asumida para satisfacer las condiciones de (5.3.2) para $k=1$;

$$\dot{f} = \mathbf{q}(f)f$$

$$|\mathbf{q}(t)| \leq \mathbf{b}$$

El plano de estado muestra que los puntos singulares son recorridos las trayectorias de estado en vecindad con las líneas conmutadas $s=0$ van directamente hacia el modo

deslizante que se presenta en el sistema.

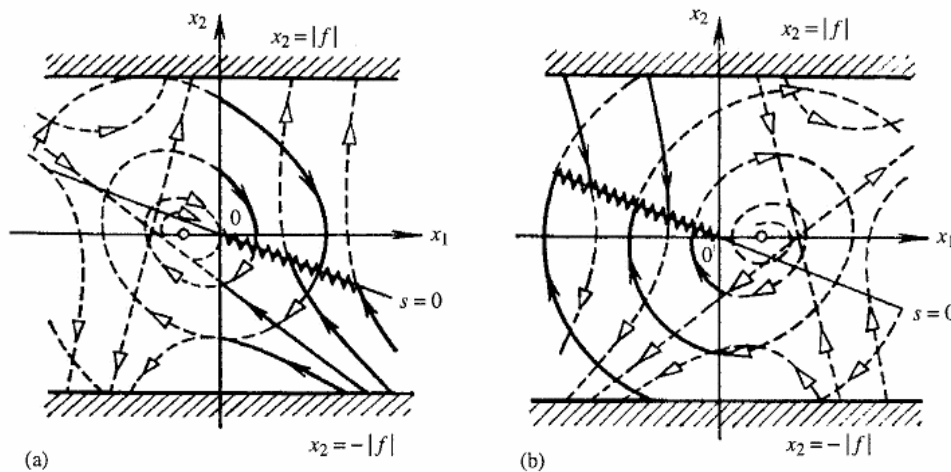


Figura 5.2 el plano de estado (a) semiplano derecho y (b) semiplano izquierdo.

a misma conclusión se llega analíticamente, dado que $\text{sing}(u) = -\text{sing}(f(t))$, el término $\mathbf{y}_u f$ en la ecuación de movimiento es igual a $-\mathbf{b}|f|\text{sign}(s)$ y para los puntos $x_2 = -cx_1$ en la línea conmutada

$$\dot{s} = (-c^2 + \mathbf{y}_u - \mathbf{y})x_1 - d\text{sign}(s) - \mathbf{b}|f|\text{sign}(s) + \dot{f}$$

Los valores de s y \dot{s} tienen signos opuestos, o las condiciones (2.4.1) para que el modo deslizante pueda mantenerse debe existir $\mathbf{a} > c^2 + \mathbf{b}$ y un valor arbitrario δ positivo. Esto cambia el signo en el término principal y habilita una retroalimentación local para rechazar perturbaciones no mensurables. Estrictamente hablando, las curvas de la figura 5.2 no son trayectorias de estado porque las perturbaciones hacen que el sistema varíe en el tiempo, cada curva puede estimarse por el lugar de los puntos para el cual, en cada tiempo fijo, la tangente de la curva coincide con el vector de velocidad de estado.

5.4 Formula de Ackermann

La Formula de Ackermann para estados lineales retroalimentados nos permiten determinar en forma explícita la ley de control escalar así puede ser obtenido un sistema con los eigenvalores deseados (Ackermann 1992) u trabajo similar serie cuando se diseña el control con modos deslizantes en sistemas lineales con discontinuidades lineales de superficie donde la ecuación de modo deslizante correspondiente es lineal y depende de los coeficientes de la ecuación de superficie. la tradicional metodología para el diseño del control con modos deslizantes implica transformaciones del sistema lineal a la forma regular (sección 5.1) consiste en dos bloques y manejando el vector de estado En uno de los bloques como un control ficticio.

En esta sección el método de diseño del control escalar de modos deslizantes descansa formula de Ackermann que esta orientada a obtener una ecuación del plano discontinua en forma explícita tan bien como en términos del sistema original, sin transformar en una forma regular (Ackermann y Utkin, 1998). Para la operación de una planta lineal bajo condiciones de incertidumbre, el control por modos deslizantes fuerza a controlar los movimientos con una ecuación lineal con los deseados lugares de eigenvalores e independientemente de las perturbaciones.

Considerando el sistema controlable descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax + b(u + f(x, t)) \quad (5.4.1)$$

Donde x es un vector de estado de n -dimension, u es el control escalar, A y b son una matriz y vector conocidos, y $f(x, t)$ es una perturbación no lineal con sobresalto superior conocido $|f(x, t)| < f_0(x, t)$.

De (5.4.1) donde los vectores de control y de perturbación (bu y bf) son colineales, así que la condición de invariancia (5.2.2) es cumplida; Consecuentemente el modo deslizante en cualquier plano es invariante respecto a las perturbaciones.

El diseño del modo de control deslizante en (5.4.1) implica la selección de un plano $s = c^T x = 0$ (c^T es una constante de un vector fila n -dimensional y por consiguiente el diseño del modo de control fuerza a $s=0$). la ecuación de modo deslizante del orden $(n-1)$ y n depende de las perturbaciones. Las propiedades dinámicas deseadas pueden ser condicionadas por una correcta selección de el vector c . tradicionalmente, la ecuación de modo deslizante es primeramente deducida y entonces los métodos convencionales de la teoría lineal es aplicada.

El propósito de esta sección es como usar la formula de Ackermann, el vector c puede ser hallado en forma explícita sin la ecuación de movimiento deslizante. tan lejano como la tarea concerniente al lugar de eigenvalores, los deseados eigenvalores I_1, I_2, \dots, I_n del sistema lineal $\dot{x} = Ax + bu$ puede ser asignada usando la formula de Ackermann (Ackermann 1992):

$$\begin{aligned} u_a &= -k^T x \\ k^T &= e^T P(A) \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} e^T &= [0 \dots 0] [b \quad Ab \dots \dots A^{n-1}b]^{-1} \\ P(I) &= (I - I_1)(I - I_2) \dots (I - I_{n-1})(I - I_n) \end{aligned}$$

Suponiendo ahora que los valores reales y los pares conjugados complejos de I_1, I_2, \dots, I_{n-1} son los eigenvalores deseados del modo deslizante.

teorema 5.1

si

$$c^T = e^T P_1(A) \quad (5.4.3)$$

$$\text{con } P_1(I) = (I - I_1)(I - I_2) \dots (I - I_{n-1}) = p_1 + p_2 I + \dots + p_{n-1} I^{n-2} + I^{n-1}$$

Donde I_1, I_2, \dots, I_{n-1} son los eigenvalores del modo deslizante en el plano $s = c^T x = 0$.

demostración

de acuerdo a la formula de Ackermann (5.4.2) I_1, I_2, \dots, I_n son eigenvalores de la matriz, $A^* = A - bk^T$, con I_n comenzando en un valor arbitrario, el vector c^T es el eigenvector derecho de A^* correspondientes a I_n , efectivamente, como en (5.4.2) y (5.4.3),

$$c^T A^* = c^T A - c^T b e^T P(A)$$

dado que

$$\begin{aligned}
c^T b &= e^T P_1(A) b \\
&= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1} b]^{-1} [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1} b] [p_1 \ p_2 \ \dots \ 1] \quad (5.4.4) \\
&= 1
\end{aligned}$$

y $P(A) = P_1(A)(A - I_n I)$, de esta manera

$$c^T A^* = c^T A - c^T P_1(A)(A - I_n I)$$

las cuales se reduce con (5.4.3) a

$$c^T = I_n c^T \quad (5.4.5)$$

el sistema $\dot{x} = (A - bk^T)x + b(u - u_a + f(x, t))$ Es ahora transformado a $s = c^T x$ adecuando el ultimo estado y el primer n-1 estado $x^* = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1}]^T$ permaneciendo invariante.

Ej.

$$\begin{bmatrix} x^* \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ c^T & \end{bmatrix} x = Tx$$

Para que T sea invertible el ultimo componente de c^T debe ser diferente de cero, puesto que es así, la condición puede ser satisfecha, reordenando las componentes del vector de estado x. bajo condiciones (5.4.4.) y (5.4.5), el sistema transformado es

$$\dot{x}^* = A_1 x^* + a_s s + b^*(u - u_a + f(x, t)) \quad (5.4.6)$$

$$\dot{s} = I_n s + u - u_a + f(x, t) \quad (5.4.7)$$

donde

$$\begin{bmatrix} A_1 & a_s \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = T(A - bk^T)T^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} b^* \\ 1 \end{bmatrix} = Tb$$

El espectro de la matriz A_1 consiste de los deseados eigenvalores. I_1, I_2, \dots, I_{n-1} .

Para deducir la ecuación de modo deslizante en el plano $s=0$, la solución a la ecuación algebraica $\dot{s} = 0$ con respecto a u puede ser substituida en (5.4.6). resultando en

$$\dot{x}^* = A_1 x^* \quad (5.4.8)$$

Con la dinámica deseada, independientemente de las perturbaciones desconocidas $f(x, t)$.

El resultado tiene una interpretación geométrica transparente. El vector c^T es un eigenvector derecho de A^* correspondientes a los eigenvalores I_n . Esto significa que el

plano $s = c^T x = 0$ es un subespacio invariante de con el movimiento determinado por el conjunto previamente seleccionado de $(n-1)$ eigenvalores I_1, I_2, \dots, I_{n-1} el modo deslizante

es forzado al plano $s = c^T x = 0$ el cual despliega la deseada dinámica. Note que el diseño del plano $s = c^T x = 0$ no implica la asignación de los eigenvalores I_n ; y solo aparece en la comprobación del teorema y puede hacerse con valores arbitrarios

El control discontinuo u esta diseñando para forzar el modo deslizante en el plano $s=0$. Esto implica que las condiciones (2.4.1) deben ser satisfechas, ej. los valores de s y \dot{s} deben tener diferentes signos en la vecindad del plano:

$$s = c^T Ax + u + (x, t) \quad (5.4.9)$$

$$u = -M(x, t) \text{sign}(s)$$

donde $M(x,t)$ es seleccionado tal que

$$M(x,t) > |C^T Ax| + f_0(x,t)$$

Si el control puede tomar solo dos valores extremos $+M_0$ o $-M_0$ (lo cual es común en las aplicaciones) entonces (5.4.9) con $M(x,t) = M_0$ fuerza a un modo deslizante en el plano $s=0$ controlado por (5.4.8) es lo adecuado, por supuesto, el dominio o condición inicial y las perturbaciones pueden ser definidos.

Ejemplo 5.2

si tenemos $\lambda=-1$ si existen los eigenvalores deseados del movimiento deslizante para el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax + b(u + f(x,t))$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

conforme a (5.4.3)

$$c^T [0 \quad 1] [b \quad Ab]^{-1} P_1(A) \quad P_1(A) = A + I$$

$$c^T = [1 \quad 2]$$

y la ecuación deslizante de superficie es de la forma (note que $c^T b = 1$)

$$s = -x_1 + 2x_2 = 0$$

por el método de control equivalente, la solución del sistema $s=0$, $\dot{s}=0$ con respecto a x_2 y u

$$u_{eq} = -x_1 - f(x_1, t), \quad x_2 = \frac{1}{2} x_1$$

pueden ser substituidos en el sistema original para obtener la ecuación de movimiento deslizante

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

El modo deslizante esta determinado por los eigenvalores $\lambda=-1$ y no depende de las perturbaciones de $f(x,t)$.

El procedimiento de diseño basado en la Formula de Ackermann esta resumido como sigue:

1. El espectro deseado del movimiento deslizante I_1, I_2, \dots, I_{n-1} es seleccionado.
2. La ecuación del plano de discontinuidad $s = c^T x = 0$ se encuentra como
$$c^T = e^T (A - I_1 I)(A - I_2 I) \dots (A - I_n I)$$
3. El control discontinuo (5.4.9) es diseñando.

Observación 5.1

De (5.4.9) el modo deslizante puede ser forzado en un sistema impasible por $u = -(a\|x\| + d) \text{sign}(s)$ con algunos números de finitos y positivos de α y cualquier positivo δ , el control se reduce en el sistema con modos deslizantes estables asintoticamente.

5.4.1 simulación de resultados

El procedimiento de diseño puede ser demostrado para estabilización por modos deslizantes de un péndulo invertido (figura 5.3) subordinado a una circunscripción con una fuerza de perturbación desconocida. la linealización de las ecuaciones de movimiento tienen la siguiente forma (Kortüm y Lugner, 1994):

$$\dot{x} = Ax + b(u + f(x, t))$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ a \\ \dot{x} \\ \dot{a} \end{bmatrix}$$

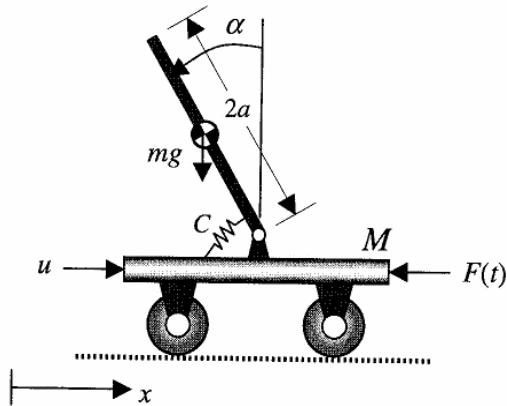


figura 5.3 péndulo invertido con sistema de carrillo

y

$$a_{32} = -3(C - mga) / a(4M_t + m)$$

$$a_{42} = -3(4M_t + m)(C - mga) / a^2 m(4M_t + m)$$

$$b_3 = 4 / (4M_t + m)$$

$$b_4 = 3 / (4M_t + m)$$

M_t y m son las masas de la carretilla y el péndulo, $2a$ es la longitud del péndulo, C la resistencia de resorte, $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, u y $f(t)$ son el control y las fuerzas de perturbación, $|f(t)| \leq f_0 = \text{constante}$ y f_0 se asume que es conocida.

El modo de control deslizante es diseñando para $M_t = 5$, $m = 1$, $a = 1$, $c = 1$, con $I_1 = -1$, $I_2 = -2$, $I_3 = -3$ son los eigenvalores deseados para el movimiento deslizante, de acuerdo a (5.4.3) la ecuación del plano de discontinuidad

$$s = c^T x = 0$$

$$c^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1][b \ Ab \ A^2b \ A^3b]^{-1}(A + I)(a + 2I)(A + 3I)$$

I es una matriz identidad

para los valores dados de los parámetros de las matrices A y B

$$c^T = [-4.77 \ 48.4 \ -8.75 \ 18.7]$$

el control asume que se toman solo dos valores extremos:

$$u = -M_0 \text{sign}(s) \quad M_0 = \text{constante}$$

de los anteriores estudios, para cualquier $M_0 > f_0$, donde hay un dominio de condiciones iniciales tal que el modo deslizante es forzado en el plano $s=0$, el ejemplo de modos de control deslizante de la simulación tiene

$$M_0 = 40 \quad f(t) = f_0 \sin(3t), \quad f_0 = 0.5$$

La figura 5.4 muestra el proceso de estabilización para las condiciones iniciales

$$x(0) = 0.5, \quad a(0) = 0.2, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{a}(0) = 0$$

El modo deslizante ocurre después de un intervalo finito de tiempo y en lo sucesivo ambas coordenadas x y α no dependen de las variaciones de las perturbaciones tiempo-variable, y ellas tienden a cero, el sistema sin retroalimentación es inestable y el control está definido, de esta manera el movimiento puede llegar a ser inestable cuando las condiciones iniciales se incrementan. El sistema es aún estable para $\alpha=0.38$ (figura 5.5) y es inestable para $\alpha=0.39$ (figura 5.6).

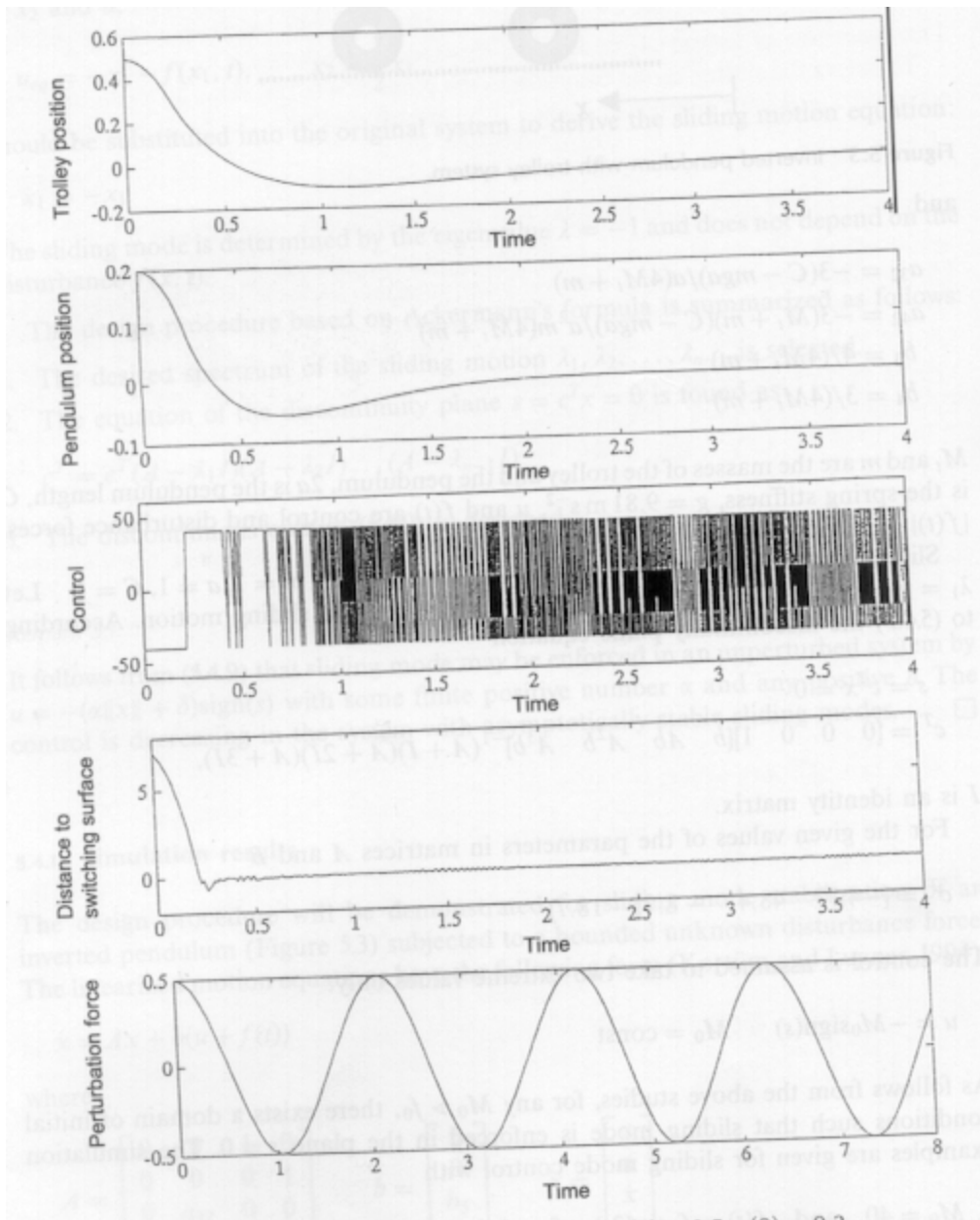


Figura 5.4 Modo de control deslizante de un péndulo invertido $x(0)=0.5$, $\alpha(0) = 0.2$.

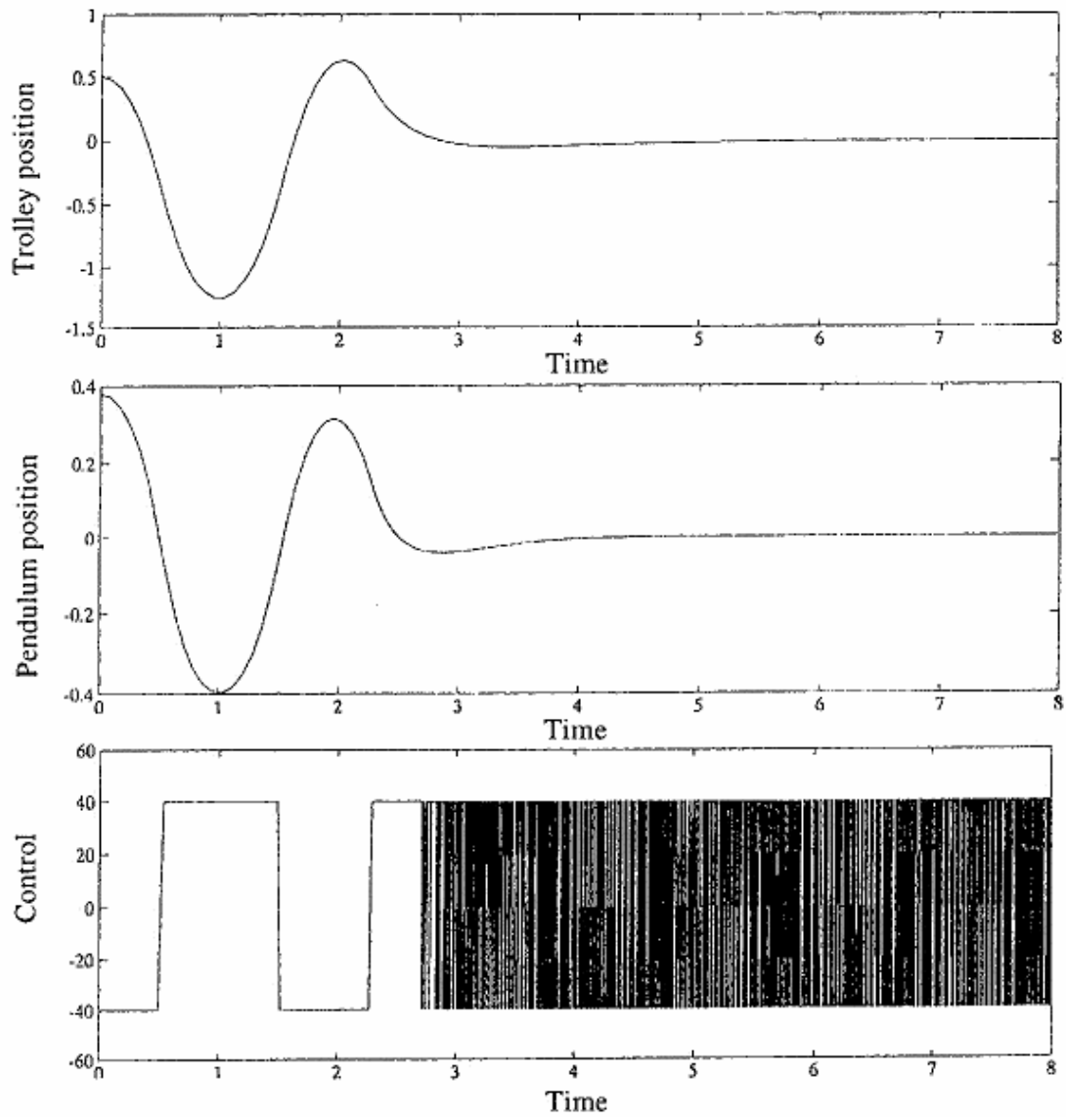


Figura 5.5 Modo de control deslizante de un péndulo invertido $\alpha(0) = 0.38$.

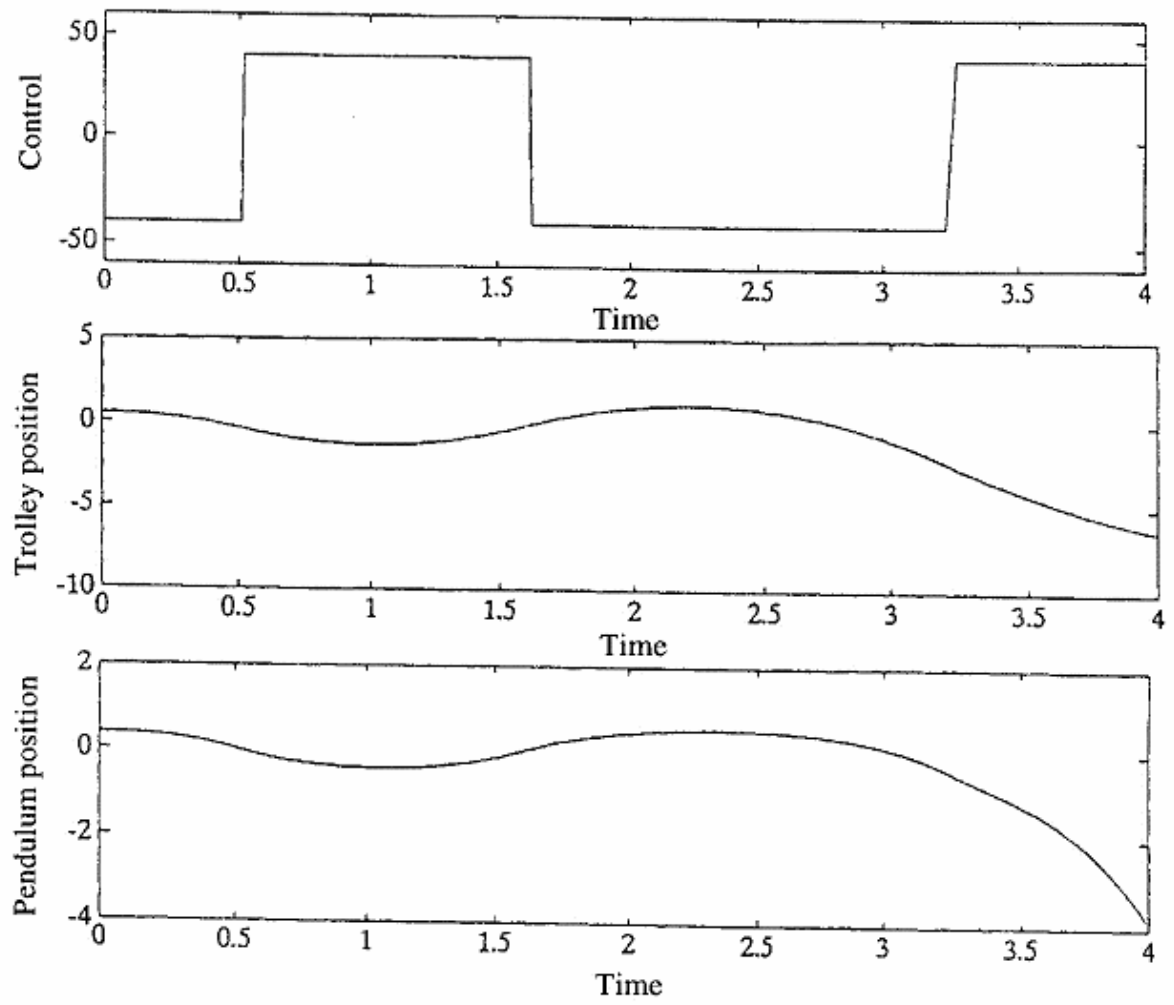


Figura 5.6 Modo de control deslizante de un péndulo invertido $\alpha(0) = 0.39$.

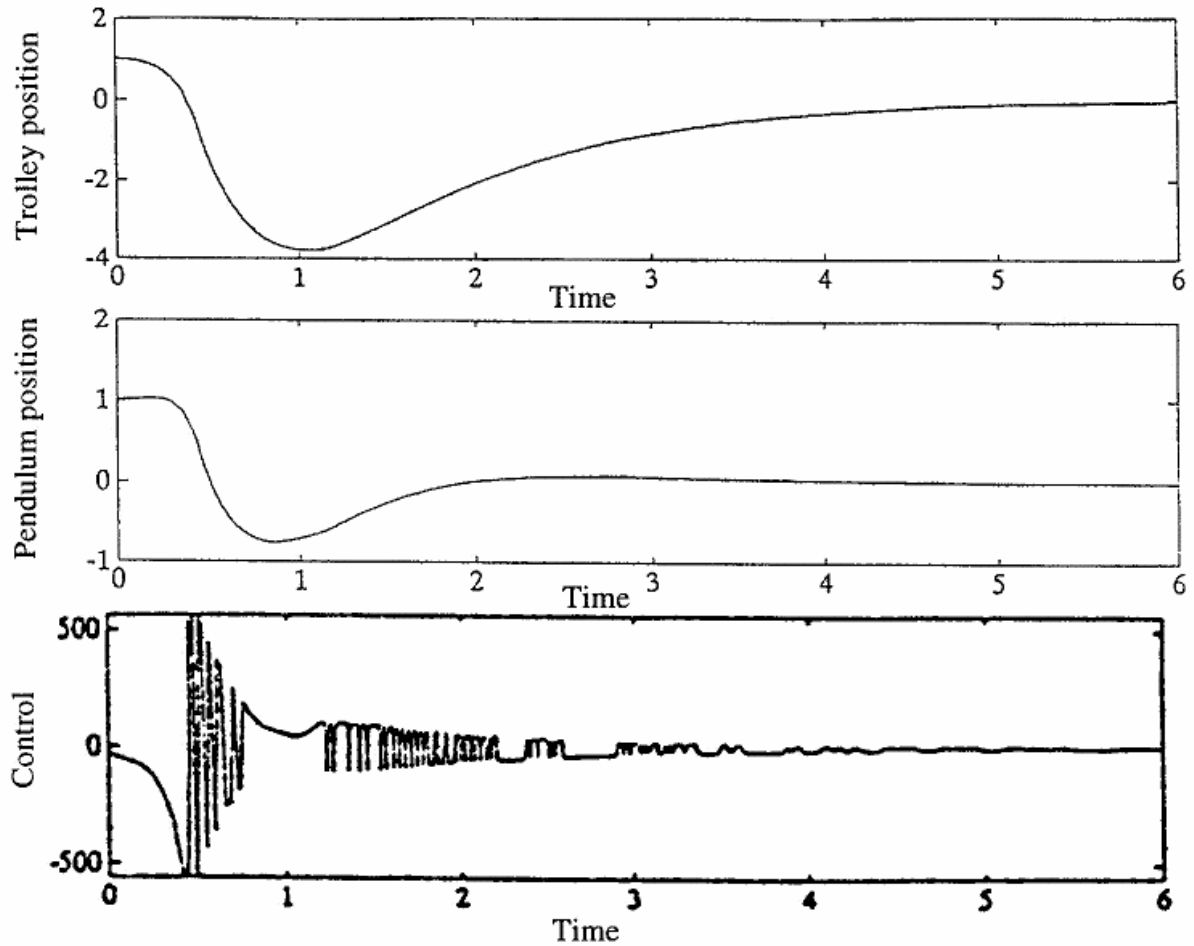


Figura 5.7 Modo de control deslizante de un péndulo invertido, sistema imperturbable con magnitud de control de estado dependiente

Como se explico en el comentario 5.1 el modo deslizante puede ser forzado en un sistema imperturbable ($f(t)=0$) para condiciones arbitrarias iniciales como parte del control lineal

$$u = -\mathbf{b}(|\mathbf{x}| + |\dot{\mathbf{x}}| + |\mathbf{a}| + |\dot{\mathbf{a}}| + \mathbf{d})\text{sign}(s)$$

Donde β y δ son valores positivos y valores finitos de β y valor arbitrarios de δ .

El resultado de la simulación con $\mathbf{b}=30$, $\mathbf{d}=0$, $\mathbf{x}(0)=1$, $\dot{\mathbf{x}}(0)=0$, $\mathbf{a}(0)=1$, y $\dot{\mathbf{a}}(0)=0$ se muestran en la figura 5.7. Ambos el vector de estado y el de control tienden a cero en modo deslizante.

5.5 Salida retroalimentada en modos de control deslizantes

La implementacion del método desarrollado en la sección previa implica que todos los componentes del vector d estado deben ser medibles, sin embargo, esto no es posible en situaciones practicas, dos aproximaciones pueden ser estudiadas para estos casos. El primer método es el diseño de los observadores del estado para establecer el vector del estado usando las mediciones disponibles de algunos estados. Y el segundo método es

derivar una clase de sistemas tal que la tarea del control puede ser resuelta diseñando un controlador retroalimentado de salida estática. La segunda aproximación al diseño del modo de control deslizante bajo información incompleta sobre los estados del sistema se estudia en esta sección. Los métodos de diseño del observador se estudian en el capítulo 6.

si asumimos para el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5,5,1)$$

$$y = Cx \quad (5,5,2)$$

con el vector de la salida y de l -dimensión

- (i) El par (A, B) es controlable y el par (A, C) es el observable
- (ii) El rango $B = m$ y el rango de $C = l$
- (iii) $l > m$

El sistema (5.5.1), (5,5,2) es descrito como salida polo-asignable si los eigenvalores de la matriz $A + BLC$, o un sistema retroalimentado con control lineal $u = Ly$ (L es una constante de la matriz $m \times l$) toma cualquier valor deseado. La clase de tales sistemas lineales puede ser encontrada de acuerdo con el resultado bien conocido de Kimura (1975).

Teorema 5.2

si el sistema (5,5,1), (5,5,2) es controlable y observable y satisface la relación

$$n < l + m - 1 \quad (5.5.3)$$

Entonces este polo-asignable por ganancia en la retroalimentación de la salida. El Teorema será utilizado luego para la asignación de polos en sistemas con control de modo deslizante.

Existe una transformación no singular de coordenadas que reduce el sistema a la forma regular (véase también la sección 3,3):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} u \quad (5,5,4)$$

Donde el par (A_{11}, A_{12}) es controlables. La ecuación (5,5,2) es transformada en

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad (C_1 \in \mathbb{R}^{l \times (n-m)}, \quad C_2 \in \mathbb{R}^{m \times m})$$

si C_2 es una matriz con rango completo, entonces puede ser representada en la forma siguiente (Reordenando los componentes del vector x_2 si es necesario):

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_{21}^* \\ C_{22}^* \end{bmatrix} \quad (C_{12}^* \in \mathbb{R}^{(l-m) \times m}, \quad C_{22}^* \in \mathbb{R}^{m \times m}), \quad \det(C_{22}^*) \neq 0$$

y para una matriz no singular

$$P = \begin{bmatrix} I_{l-m} & -C_{21}^*(C_{22}^*)^{-1} \\ 0 & (C_{22}^*)^{-1} \end{bmatrix}, C_{11} \text{ y } C_{21} \text{ son matrices constantes}$$

$$y^* = py = [PC_1 \quad PC_2]x = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

el termino permutado $s=0$ del modo de control deslizante es definido como

$$s = Fy^* = [F_1 \quad I_m] \begin{bmatrix} C_{11}x_1 \\ C_{21}x_1 + x_2 \end{bmatrix} = (F_1C_{11} + C_{21})x_1 + x_2$$

Donde $F \in \Re^{m \times l}$, $F_1 \in \Re^{n(l-m)}$.

el control de entrada es seleccionado como una función discontinua de la salida

$$u = -K \cdot \text{sign}(s) \quad K = \text{diag}[k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_m]$$

La ganancia de control k_i son elegidas como

$$k_1 > |f_i| \quad f^T = [f_1 \quad \dots \quad f_m]$$

$$f = ((F_1C_{11} + C_{12})A_{11} + A_{21})x_1 + ((F_1C_{11} + C_{21})A_{12} + A_{22})x_2$$

lo cual significa que la derivada respecto al tiempo e la función de Lyapunov candidata.

$$V = 1/2 s^T s$$

$$\dot{V} = s^T f - s^T K \cdot \text{sign}(s) < 0$$

si esta definida negativa y el modo deslizante puede ser forzado después de un intervalo de tiempo finito en modo deslizante $s=0$ y

$$x_2 = -(F_1C_{11} + C_{21})x_1 \quad (5.5.5)$$

substituyendo (5.5.5) en (5.5.4) tenemos

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C_{21})x_1 + A_{12}u \quad (5.5.6)$$

donde $u = -(F_1C_{11} + C_{12})x_1 = F_1y_1 \in \Re^m$ es tratada como una entrada de control

el sistema original (5.5.1),(5.5.2) en modos deslizantes son remplazados para reducir el orden del sistema (5.5.6) y $s=0$:

$$\dot{x}_1 = (A^*)x_1 + A_{12}u \quad (5.5.7)$$

$$y = C_{11}x_1 \quad (5.5.8)$$

Donde $A^* = (A_{11} - A_{12}C_{12})$; y el par (A^*, A_{12}) es controlable debido a la controlabilidad del par (A_{11}, A_{12}) (Utking y Young, 1978).

Ahora tenemos el arreglo con un polo asignado para un sistema controlable de orden reducido con dimensión $(l-m)$ del vector de salida, La condición de Kimura (teorema 5.2) puede reformularse para el lugar de los eigenvalores del sistema (5.5.7), (5.5.8).

teorema 5,3

si el sistema original (5.5.1), (5.5.2), es controlable, el sistema (5.5.7), (5.5.8), es observable y satisface la relación

$$(n-m) \leq (l-m) + m^* - 1 \quad m^* = \text{rango}(A_{12}) \quad (5.5.9)$$

Así el polo asignado por la ganancia de salida retroalimentada. Bajo la condición (5.5.9.)

existe la matriz F_1 tal que los valores propios de la ecuación de modos deslizantes

$$\dot{x}_1 = (A^* - A_{12}F_1C_{11})x_1 \quad (5.5.10)$$

Tomando los valores deseados. Desde $mn^* \leq m^*$, la condición (5,5,9) $n \leq 1 + m^* - 1$ significa el Sistema original (5.5.1), (5.5.2) es para asignar polos, por medio de la retroalimentación de la ganancia de salida y el sistema del orden reducido (5.5.7), (5.5.8) es polo-asignable. Si el par (C_{11}, A^*) no es observable, el mismo procedimiento es aplicable a la parte observable de x_1 . El sistema inobservable (5.5.7), (5.5.8) puede ser presentado en la forma siguiente (Kwakernaak, 1972):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & 0 \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_1'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12}' \\ A_{12}'' \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = C_{11}'x_1'$$

Con un par observable. entonces el subsistema superior es polo-asignable si se satisface la condición (5,5,9), mientras los valores propios del subsistema más bajo

Son. De A_{21}^* y puede ser cambiado sin condiciones.

Observación 5.2

El método antedicho de la colocación del valor propio es aplicable para los sistemas con parámetros de planta variaciones y disturbios (5,2,1):

$$\dot{x} = (A - \Delta A)x + Bu + Qf$$

$$y = Cx$$

Si las condiciones de invariancia (5,2,2) se mantienen entonces el movimiento del modo deslizante no depende de ninguno de los dos ΔA o $f(t)$ y es gobernado por la ecuación (5,5,10).

Ejemplo 5.3

Suponiendo Que el sistema original es polo-asignable, pero el modo de control deslizante no es polo-asignable.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (n = 4, \quad m = 2, \quad l = 3)$$

Este sistema es controlable y observable. la condición (5.5.9) es satisfecha, el termino permutado es diseñando como

$$s = \begin{bmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ f_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

mediante los parámetros f_1 y f_2 a ser seleccionado

el sistema de orden reducido es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$y_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

este sistema es controlable y observable también pero la condicione (5.5.9) no se satisface, debido a

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = m^* = 1 \quad y \quad n > l + m^* - 1$$

Lo que hace imposible colocar polos arbitrariamente. substituyendo $\mathbf{u} = F_1 y = -(f_1, f_2)^T x_1$ en (5.5.11) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 & 1 \\ 1-2f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dado que un parámetro es libre, solo un polo puede ser colocado arbitrariamente.

ejemplo 5.4

Suponiendo ambos el sistema original y el sistema de control de modos deslizantes es polo-asignable.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (n=4, \quad m=2, \quad l=3)$$

Este sistema es controlable y observable. y la condición (5.5.9) es satisfecha, el termino permutado es diseñando como

$$s = \begin{bmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ f_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

el sistema de orden reducido es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Es controlable y observable, y satisface la condición (5,5,9) por lo tanto es polo-asignable.

De hecho cualquier valor propio del sistema con control

$$u = -F_1 y_1 = -(f_1, f_2)^T x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & -1 \\ 1+f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Puede ser asignado por una opción apropiada de los coeficientes f_1 y f_2 .

5.6 control de sistemas variantes en el tiempo

Diseñar la dinámica deseada de los sistemas de control tiempo-variantes es considerablemente la tarea mas complicada en el diseño de los sistemas de control con parámetros constantes, entonces las propiedades de los sistemas tiempo-variantes no pueden ser interpretado en términos de sus valores propios.

El desacoplamiento del sistema de movimientos en movimientos de una dimensión más baja permite a uno simplificar el diseño del control. Seguiremos el principio supuesto de bloques de control (Drakunov et al., 1990) para reducir el problema original de diseño a un conjunto de problemas independientes con dimensiones más bajas. En un sistema tiempo-variante

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad u \in \mathfrak{R}^m, \quad \text{rango}(B) = m$$

(5,6,1) con los elementos de $A(t)$ y de $B(t)$ definidos con derivadas respecto al tiempo similar a (5.1.1) y (5.1.2), se asume que la matriz $B(t)$ puede ser representada en la forma

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \det(B_2(t)) \neq 0 \quad \text{para cualquier } t$$

la transformación coordenada no singular

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = T A T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \dot{T} T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T x, \quad T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0 & B_2^{-1} \end{bmatrix}$$

(5,6,2)

reduciendo el sistema de ecuaciones (5,6,1) a la forma regular que consiste en dos bloques:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u$$

(5,6,3)

Donde $x_1 \in \mathfrak{R}^{(n-m)}$, $x_2 \in \mathfrak{R}^m$ y A_{ij} son matrices tiempo-variantes ($i,j=1,2$).

El vector de estado x_2 del segundo bloque en (5,6,3) es para manipular el control del primer bloque; x_2 se debe seleccionar en función del vector de estado x_1 , para formar la dinámica deseada del primer bloque. limitaremos nuestra opción a funciones lineares con ganancias tiempo-variantes

$$x_2 = -C(t)x_1 \quad C(t) \in \mathfrak{R}^{m \times (n-m)}$$

(5,6,4)

moldeando la dinámica deseada del sistema.

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C)x_1$$

De acuerdo con un cierto criterio del funcionamiento, esto se reduce a diseñar el sistema lineal tiempo-variante de orden $(n - m)$ con la matriz de retroalimentación $C(t)$. Esta tarea es más fácil que la tarea original de orden n con el control u que es una función lineal de un

vector de estado completo $x^T = [x_1^T \quad x_2^T]$

si se encuentra la matriz $C(t)$, entonces control discontinuo que hace cumplir el modo deslizante en el múltiplo con

$$s = x_2 + C(t)x_1 = 0 \quad s^T = (s_1, s_2, \dots, s_m)$$

(5.6.5) Puede ser diseñado. La ecuación de la proyección de movimiento en el subespacio s en el sistema con control

$$u = -(\alpha(|x_1| + |x_2|) + \mathbf{d}) \sin(s)$$

de la forma

$$\dot{s} = (CA_{11} + A_{21} + \dot{C})x_1 + (CA_{12} + A_{22})x_2 - (\alpha(|x_1| + |x_2|) + \mathbf{d}) \sin(s)$$

Donde α y δ son constantes positivas. El coeficiente α puede ser encontrado tal como cualesquier δ positivo 5, las condiciones (2.4.1) se mantienen para cualquier función s_i . Entonces el modo deslizante existe en cada plano $s_i = 0$ y su intersección $s = 0$.

Aunque el diseño de la dinámica deseada en modo deslizante es más fácil que para el original sistema, nos ocupamos de un sistema tiempo-variante y los métodos especiales que se deben emplear para la estabilización. Discutiremos uno de ellos dando por resultado sistemas tiempo-variables estables exponencialmente

La idea del procedimiento de diseño procedimiento es tomar primero el sistema en (5.6.3) con control intermedio x_2 y desacoplados en dos subsistemas, similarmente para aplicar la transformación (5.6.2) del original sistema. si $m \leq n - m$ y el rango de $A_{12} = m$ entonces el primer sistema en (5.6.3) puede ser transformado en

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= A_{11}'x_1' + A_{21}'x_1'' \\ \dot{x}_1'' &= A_{21}'x_1' + A_{22}'x_1'' + x_2 \quad x_1' \in \mathbb{R}^{n-2m}, \quad x_1'' \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_1'' \end{bmatrix} = T_1 x_1 \quad T_1 = \begin{bmatrix} I_{n-2m} & -B_1' B_2'^{-1} \\ 0 & B_2'^{-1} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} \quad \det(B_2') \neq 0 \quad (5.6.7)$$

El vector x' en el primer subsistema de (5.6.7) es manejado como control y asumimos que el rango de $A_{12}' = n - 2m$. entonces para cualquier matriz $A_1(t)$

$$\dot{x}' = A_1 x_1' \quad (5.6.8)$$

si

$$x_1'' = -C_1(t)x_1' \quad (5.6.9)$$

Donde $C_1 = (A_{12}')^+ (A_{11}' - A_1)$ con $(A_{12}')^+$ comenzando por la pseudoinversa de A_{12}' , ej. $A_{12}'(A_{12}')^+ = I_{n-2m}$

$$s_1 = x_1'' + C_1(t)x_1'$$

(5.6.10)

Tiende a cero. para la ecuación de s_1 se deriva de (5.6.6), (5.6.9):

$$\dot{s}_1 = S'x_1' + S''x_1'' + x_2$$

Con matrices S' y S'' dependiendo de los elementos de (5.6.6), (5.6.9) y sus derivadas respecto al tiempo.

para cualquier matriz $A_2(t)$

$$\dot{s}_1 = A_2 s_1 \quad (5.6.11)$$

si

$$x_2 = A_2 s_1 - S' x_1' - S'' x_1'' \quad (5.6.12)$$

dado que los vectores x_1, x_1', x_1'' y s_1 se correlacionan con transformaciones no singulares (5.6.7) y (5.6.9), la ecuación (5.6.12) puede ser presentada como

$$x_2 = -C(t)x_1$$

(5.6.13) Con $C(t)$ dependiente de las matrices A y B del sistema original (5.6.1), sus derivadas respecto al tiempo y las matrices A_1 y A_2 .

la condición (5.6.13) se mantiene si el control u (5.6.1) se diseña una función discontinua por forzar el estado del modo deslizante en el múltiplo

$$s = x_2 + C(t)x_1 = 0$$

el procedimiento de diseño de control anterior

$$u = -(a(|x_1| + |x_2|) + d) \sin(s)$$

Es aplicable para esta tarea. Después del que el modo deslizante en $s = 0$ ocurre, las condiciones (5.6.12) y (5.6.13) y s_1 puede ser controlada por una ecuación autónoma

(5.6.11) Como sigue de la primera ecuación de (5,6,6) y (5,6,8) hasta (5,6,10),

$$\dot{x}' = A_1 x_1' + A_{12} s \quad (5,6,14)$$

la dinámica del sistema en modo deslizante esta determinado por las ecuaciones diferenciales (5,6,11) y (5,6,14), o por las matrices A_1 y A_2 que se pueden seleccionar por el diseñador. Por ejemplo, pueden ser asignada constante con espectros tales que proveen la convergencia exponencial en la relación deseada.

La Generalización del método de diseño para los casos en que el rango de $\text{rango}(A_{12}) < m$ y el $\text{rango}(A_{12}') < n - 2m$ se pueden encontrar en Drakunov et al. (1990). Drakunov et al. Muestran que la estabilidad exponencial del modo deslizante se puede proporcionar para sistemas tiempo-variables controlables.

Referencias

- ACKERMANN, J., 1992, *Sampled-Data Control Systems*, Berlin: Springer-Verlag.
- ACKERMANN, J. y UTKIN, V., 1998, Sliding mode control design based on Ackermann's formula, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, 234-237.
- DRAKUNOV, S. et al., 1990, Block control principle I, *Automation and Remote Control*, **51**, 601-9.
- DRAZENOVIC, B., 1969, The invariance conditions in variable structure systems, *Automatica*, **5**, 287-95.
- KIMURA, H., 1975, Pole assignment by gain output feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **20**, 509-16.
- KORTÜM, W. and LUGNER, P., 1994, *System dynamik und Regelung von Fahrzeugen. Einfuehrung und Beispiele* (in German), Berlin: Springer-Verlag.
- KWAKERNAAK, H. and SIVAN R., 1972, *Linear Optimal Control Systems*, New York: Interscience.
- UTKIN, V. and YOUNG, K. - K. D., 1978, Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems, *Automation and remote Control*, **39**, 1466-70.