

## CAPITULO SEIS

---

## Observadores en Modos Deslizantes

---



Todos los métodos de diseño de los capítulos anteriores, excepto de aquellos de la sección 5.5, se han desarrollado en el espacio de estado. En la práctica, sin embargo, solo una parte de las componentes pueden ser medidas directamente. Los métodos de control en modos deslizantes de la sección 5.5 (con la señal de salida siempre disponible para la retroalimentación) son aplicables solo a un número limitado de sistemas. Una alternativa es diseñar observadores asintóticos, los cuales constituyen modelos dinámicos para estimar todas las componentes del vector de estado utilizando la medición directa de las componentes. Primeramente, se estudiarán los observadores convencionales de orden completo y de orden reducido relacionados con sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Posteriormente se presentarán las modificaciones a modos deslizantes de los observadores de estado de sistemas variantes e invariantes en el tiempo (Utkin, 1992) con estimación de perturbaciones externas (Hashimoto *et al.*, 1990).

### 6.1 Observadores lineales.

La idea de diseño de los observadores puede ser ilustrada para sistemas invariantes en el tiempo (5.1.1.):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.1.1)$$

con el vector de salida

$$y = Cx \quad y \in \mathfrak{R}^l, \quad C = \text{const}, \quad \text{rank}(C) = l \quad (6.1.2)$$

La pareja de matrices  $(C, A)$  se suponen observables.

Un observador lineal se diseña en la misma forma que el sistema original (6.1.1) con una entrada adicional pendiente de la diferencia entre los valores reales (6.1.2) y los valores estimados del vector de salida:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \quad (6.1.3)$$

Donde  $\hat{x}$  es un estimado del vector de estado del sistema y  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$  es una matriz de entrada. Por supuesto, el vector del observador de estado  $\hat{x}$  está disponible para generar la acción de control con ayuda de la dinámica del sistema auxiliar.

La ecuación del movimiento con respecto a la diferencia  $\bar{x} = \hat{x} - x$  es:

$$\dot{\bar{x}} = (A + LC)\bar{x} \quad (6.1.4)$$

El comportamiento del corrimiento gobernado por la ecuación homogénea (6.1.4) se determina mediante los valores característicos de la matriz  $A + CL$ . Para los sistemas que sean observables, es posible seleccionar en forma arbitraria a la matriz  $L$  (Kwakernaak y Sivan, 1972). Esto significa que es posible prever cualquier razón de convergencia de la matriz de estado. Por lo tanto, es posible aplicar cualquier algoritmo de control utilizando el estado observado  $\hat{x}(t)$ .

El orden del observador puede reducirse debido al factor de rango de  $\text{rango}(C) = l$  y el vector de estado puede ser representado como:

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad x^T = [x_1^T \quad x_2^T], \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^1, \quad \det(C_2) \neq 0$$

Es suficiente diseñar el observador para el vector  $x_1$ , siendo el valor de  $x_2$  igual a:

$$x_2 = C_2^{-1}(y - C_1 x_1) \quad (6.1.5)$$

Escribiendo las ecuaciones del sistema (6.1.1),(6.1.2) en el espacio  $(x_1, y)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}y + B_1u \\ \dot{y} &= A_{21}x_1 + A_{22}y + B_2u \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Donde

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

(Si la transformación de coordenadas es no singular, entonces  $\det(T) \neq 0$ .)

El diseño de observadores de orden reducido se basa en la transformación de coordenadas

$$x' = x_1 + L_1 y \quad (6.1.7)$$

y el comportamiento del sistema se considera en el espacio  $(x', y)$ . Obviamente, la transformación

de coordenadas para cualquier  $L_1$  es no singular.

La ecuación con respecto a  $x'$  se obtiene de (6.1.5) hasta (6.1.7):

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= (A_{11} + L_1 A_{21})x' + A'_{12}y + (B_1 + L_1 B_2)u \\ A'_{12} &= A_{12} + L_1 A_{22} - (A_{11} + L_1 A_{21})L_1 \end{aligned}$$

El observador se diseña en la forma de un sistema dinámico de orden  $(n - l)$

$$\dot{\hat{x}}' = (A_{11} + L_1 A_{21})\hat{x}' + A_{12} \dot{y} + (B_1 + L_1 B_2)u \quad (6.1.8)$$

Siendo  $\hat{x}'$  como un estimado del vector de estado  $x'$ , la diferencia  $\bar{x}' = \hat{x}' - x'$  esta regida por la ecuación:

$$\dot{\bar{x}}' = (A_{11} + L_1 A_{21})\bar{x}' \quad (6.1.9)$$

Si el sistema original es observable, la matriz de valores característicos  $A_{11} + L_1 A_{21}$  puede ser asignada arbitrariamente (Kwakernaak and Sivan, 1972). Esto significa que  $\bar{x}'$  tiende a cero y  $\hat{x}'$  tiende a  $x'$  para cualquier razón deseada. Las componentes del vector de estado  $x_1$ , y  $x_2$ , se encuentran en (6.1.5) y (6.1.7).

## 6.2 Observadores para sistemas lineales e invariantes con el tiempo

A continuación se procede con el diseño de observadores de estado con funciones discontinuas como entradas de diferencias donde el movimiento precede a los modos deslizantes puede ser manejada en la intersección de la superficie discontinua. El observador es descrito mediante las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{y} + L_1 v \\ \dot{\hat{y}} &= A_{21}\hat{x}_1 + A_{22}\hat{y} + B_2 u - v \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

donde  $\hat{x}_1$  e  $\hat{y}$  son los valores estimados del sistema,

$$v = M \text{sign}(\hat{y} - y) \quad M > 0, \quad M = \text{constante}$$

Si el vector "y" esta disponible para su medición, es posible obtener el valor de  $\hat{y} - y$ .

El vector de función discontinua  $v \in \Re^l$  se selecciona con el propósito de que los modos deslizantes obliguen a que el vector de diferencia  $\bar{y} = \hat{y} - y$  tienda a cero. La matriz  $L_1$  debe seleccionarse a fin de que la diferencia  $\bar{x}_1 = \hat{x}_1 - x_1$  tienda a cero con una velocidad específica. Las ecuaciones para  $\bar{x}_1$  y  $\bar{y}$  se obtienen de las ecuaciones (6.1.6) y (6.2.1):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{y} + L_1 v \\ \dot{\bar{y}} &= A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{y} - v \\ v &= M \text{sign}(\bar{y}) \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Como se mostró en la sección 2.4, los modos deslizantes obligan a la ecuación de diferencia a reducirse a cero ( $\bar{y} = 0$ ) si la matriz multiplicadora  $v$  en la segunda ecuación de (6.2.2) es definida negativa y  $M$  toma valores finitos pero muy grandes. Este es el caso, debido a que  $v$  es multiplicada por una matriz identidad negativa. Es posible que los modos deslizantes obliguen a la ecuación diferencia  $\bar{y} = 0$  tienda a cero siempre y cuando las condiciones iniciales esten acotadas. Recordando los

métodos de control equivalente para obtener  $v_{eq}$  y resolver la ecuación  $\dot{\bar{y}} = 0$  es necesario primeramente sustituir con  $\bar{y} = 0$  en la ecuación (6.2.2) para derivar la ecuación en modos deslizantes:

$$\begin{aligned} v_{eq} &= A_{21} \bar{x}_1 \\ \dot{\bar{x}}_1 &= (A_{11} + L_1 A_{21}) \bar{x}_1 \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Lo cual coincide con la expresión (6.1.9). Seleccionando apropiadamente el valor de  $L$  es posible la convergencia de las variables  $\bar{x}_1 \rightarrow 0$  y  $\hat{x}_1 \rightarrow x_1$  y posteriormente es posible obtener  $x_2$  mediante la expresión (6.1.5).

El observador en modos deslizantes con una función discontinua como entrada (6.2.2) es equivalente a un observador de orden reducido (6.1.8). Sin embargo, si una señal de ruido afecta tanto a la planta como al observador, es preferible un observador no lineal debido a sus propiedades de filtrado, que coinciden en su forma de operar con los filtros de Kalman (Drakunov, 1983).

## 6.3 Observadores para sistemas lineales variantes en el tiempo

### 6.3.1 Esquema del observador

Para los sistemas variantes en el tiempo:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (6.3.1)$$

$$y = C(t)x \quad (6.3.2)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u \in \mathfrak{R}^m$  e  $y \in \mathfrak{R}^l$ , siendo el vector de salida  $y(t)$  y las matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$  conocidas. Se pretende diseñar un observador que estime al vector de estado  $x(t)$ .

Para cualquier transformación no sinusoidal del estado  $x$  en  $(y_0^T, x_1^T)$ ,  $y_0 \in \mathfrak{R}^{l_0}$ ,  $x_1 \in \mathfrak{R}^{n-l_0}$ , la ecuación (6.3.1) esta representada mediante:

$$\dot{y}_0 = A_{00}(t)y_0 + A_{01}^*(t)x_1 + B_0(t)u \quad (6.3.3)$$

$$\dot{x}_1 = A_{10}^*(t)y_0 + A_{11}^*(t)x_1 + B_1^*(t)u \quad (6.3.4)$$

El sistema en (6.3.3), (6.3.4) para un vector  $y_0$  conocido se conoce como modelo Bloque-Observador. Los índices y superíndices en (6.3.3), (6.3.4) denotan los bloques matriciales. El sistema (6.3.3), (6.3.4) puede ser representado en modo Bloque-Observador si el rango de  $l_0$  y la posición del menor principal de la matriz  $C(t)$  no varía con el tiempo. En este paso, después de ordenar los vectores  $x$  e  $y$ , existe una matriz  $\Lambda_0(t)$  tamaño  $(l - l_0) \times l_0$  tal que:

$$C(t) = \begin{bmatrix} C_0(t) \\ \Lambda_0(t)C_0(t) \end{bmatrix} \quad (\text{rango } C_0(t) = l_0)$$

y la matriz  $C_0$  de tamaño  $l_0 \times n$  es de la forma:

$$C_0(t) = [C_0'(t) \quad C_0''(t)]$$

Siendo la matriz  $C_0''(t)$  de tamaño  $l_0 \times l_0$  no singular. El vector  $y_0$  se obtiene como:

$$y_0 = C_0(t)x = C_0'(t)x_1 + C_0''(t)x_1^*$$

donde  $x^T = [x_1^T \quad x_1^{*T}]$  se transforma en  $[y_0^T \quad x_1^{*T}]$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ x_1^* \end{bmatrix} = T_0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0' & C_0'' \\ I_{n-l_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^* \end{bmatrix} \quad (\det(T_0) \neq 0)$$

La ecuación de salida (6.3.2) esta escrita como:

$$y = \begin{bmatrix} C_0 \\ \Lambda_0 C_0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} C_0 \\ \Lambda_0 C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \Lambda_0 y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{l_0} \\ \Lambda_0 \end{bmatrix} y_0 \quad (6.3.5)$$

Donde  $I_{l_0}$  es una matriz identidad. El vector  $y_0$  consiste de elementos linealmente independientes del vector  $y$ , por lo tanto el sistema puede ser transformado en un Bloque-Observador usando la expresión (6.3.5).

Este procedimiento permite formar un Bloque-Observador para  $0 < l_0 < n$ . En el caso en que  $l_0 = 0$  implica que el sistema original no es observable (bajo la suposición de que la posición del menor principal no varíe con el tiempo). Para  $l_0 = n$  es posible obtener el vector de estado directamente de la expresión  $y = C(t)x$ .

Tomando el vector  $A_{01}^*(t)x_1$  en el bloque (6.3.3) como un vector de salida del subsistema (6.3.4) y suponiendo que la posición y el rango del menor principal de la matriz  $A_{01}^*(t)$  no varia con el tiempo, el subsistema (6.3.3) puede ser representado en la forma de un Bloque-Observador. El rango de  $A_{01}^*(t)$  es igual a  $l_1$  ( $0 \leq l_1 \leq l_0$ ). Existe una matriz  $\Lambda_1(t)$  de tamaño  $(l_0 - l_1) \times l_1$  tal que:

$$A_{01}^*(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ \Lambda_1(t)C_1(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{rango } A_{01}^*(t) = l_1 \quad \text{rango } C_1(t) = l_1$$

$$C_1(t) = [C_1'(t) \quad C_1''(t)] \quad (\det C_1''(t) \neq 0)$$

donde  $C_1'(t) \in \mathfrak{R}^{l_1 \times (n-l_0-l_1)}$ ,  $C_1''(t) \in \mathfrak{R}^{l_1 \times l_1}$ . Entonces  $y_1(t)$  esta dada por

$$y_1(t) = C_1(t)x_1 = C_1'(t)x_2 + C_1''(t)x_2^*$$

donde  $y_1 \in \mathfrak{R}^{l_1}$ ,  $x_2 \in \mathfrak{R}^{n-l_0-l_1}$  y  $x_2^* \in \mathfrak{R}^{l_1}$ ,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1' & C_1'' \\ I_{n-l_1-l_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^* \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^* \end{bmatrix} \quad (\det(T_1) \neq 0)$$

Aplicando esta transformación al sistema (6.3.4), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = T_1 A_{10}^* y_0 + (T_1 A_{11}^* T_1^{-1} + T_1 \dot{T}_1^{-1}) \begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + T_1 B_1^* u \quad (6.3.6)$$

donde

$$T_1 A_{10}^* = \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{20}^* \end{bmatrix} \quad (T_1 A_{11}^* T_1^{-1} + T_1 \dot{T}_1^{-1}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$T_1 B_1^* = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2^* \end{bmatrix}$$

La ecuación (6.3.6) se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_{10}(t)y_0 + A_{11}(t)y_1 + A_{12}^*(t)x_2 + B_1(t)u \\ \dot{x}_2 &= A_{20}^*(t)y_0 + A_{21}^*(t)y_1 + A_{22}^*(t)x_2 + B_2^*(t)u \end{aligned}$$

El bloque (6.3.3) se escribe como:

$$\dot{y}_0 = A_{00}(t)y_0 + A_{01}(t)y_1 + B_0(t)u \quad (6.3.7)$$

$$\text{donde} \quad A_{01}(t) = \begin{bmatrix} I_{l_1} \\ \Lambda_1(t) \end{bmatrix} \quad (\text{rango } A_{01}(t) = l_1)$$

Para  $l_1 < n - l_0$  el sistema (6.3.7) también puede ser representado en forma de un Bloque-Observador ( $l_1 > 0$ , de otra forma el sistema en (6.3.1), (6.3.2) no es observable). Después de cada paso, la dimensión de  $x_i$  es menor que la dimensión de  $x_{i-1}$ , por lo que el procedimiento termina después de un número finito de pasos.

Observando que el procedimiento de diseño del Bloque-Observador del  $i$ -ésimo sistema es:

$$\dot{y}_i = \sum_{j=0}^i A_{i,j}(t)y_j + A_{i,i+1}^*(t)x_{i+1} + B_i(t)u \quad (6.3.8)$$

$$\dot{x}_{i+1} = \sum_{j=0}^i A_{i+1,j}^*(t)y_j + A_{i+1,i+1}^*(t)x_{i+1} + B_{i+1}^*(t)u$$

el rango y la posición del menor principal de la matriz  $A_{i,i+1}^*(t)$  no varía con el tiempo. Finalmente, este procedimiento termina después de  $r$  pasos y  $y_r = C_r x_r = C_r^{//} x_{r+1}^*$  ( $x_{r+1} = 0$ ).

$$\begin{aligned}\dot{y}_r &= A_{r0}(t)y_0 + A_{r1}(t)y_1 + \dots + A_{rr}(t)y_r + A_{r,r+1}^*(t)x_{r+1} + B_r u \\ &= \sum_{j=0}^r A_{r,j}(t)y_j + B_r(t)u\end{aligned}$$

De forma semejante a (6.3.3) y (6.3.7),  $A_{i,i+1}^*(t)x_{i+1}$  en (6.3.8) puede ser reemplazado mediante  $A_{i,i+1}(t)y_{i+1}$  como se muestra a continuación:

$$\dot{y}_i = A_i(t)y_i^* + A_{i,i+1}(t)y_{i+1} + B_i(t)u \quad (i = 1, \dots, r-1) \quad (6.3.9)$$

$$\dot{y}_r = A_r(t)y_r^* + B_r(t)u \quad (6.3.10)$$

donde  $A_i(t) = (A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ii})$ ,  $y_i^{*T} = (y_0^T, y_1^T, \dots, y_i^T)$ ,  $y_i \in \mathfrak{R}^{l_i}$ ,  $\text{rango } A_{i,i+1}(t) = l_{i+1}$  y  $A_{i,i+1}$  es una matriz completa en rango. Por lo tanto, los sistemas (6.3.9), (6.3.10) están representados mediante el siguiente formato para Bloque-Observador:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{r-1,r} \\ A_{r0} & A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} & \dots & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ \dots \\ B_r \end{bmatrix} u$$

con matrices  $A_{i,i+1}$  completas en rango.

### 6.3.2 Diseño de Observadores

Utilizando el enfoque en modos deslizantes, el procedimiento de diseño de observadores para sistemas variantes en el tiempo puede ser dividido en  $r$  problemas independientes de estabilización, todos ellos triviales.

Sea la ecuación del observador este en la forma:

$$\dot{\hat{y}}_i = A_i(t)\hat{y}_i^* + A_{i,i+1}(t)\hat{y}_{i+1} + B_i(t)u + v_i \quad (i = 0, \dots, r-1) \quad (6.3.11)$$

$$\dot{\hat{y}}_r = A_r(t)\hat{y}_r^* + B_r(t)u + v_r$$

Las señales de entrada  $v_i$  para el observador se diseñan mediante:

$$v_0 = M_0 \text{sign}(y_0 - \hat{y}_0) \quad (6.3.13)$$

$$v_i = M_i \text{sign}(A_{i-1,i}^+ z_i) \quad \dot{t}_i z_i + z_i = v_{i-1} \quad (i = 0, \dots, r) \quad (6.3.14)$$

Donde la pseudomatriz de la izquierda  $A_{i-1,i}^+$  ( $A_{i-1,i}^+ A_{i-1,i} = I_{l_i}$ ) existe, debido a que  $A_{i-1,i}^+$  es una matriz de rango completo. La ecuación de diferencia  $\tilde{y}_i = y_i - \hat{y}_i$  es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{r-1,r} \\ A_{r0} & A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} & \dots & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_r \end{bmatrix} u$$

Estando las condiciones iniciales acotadas, para cualquier valor finito  $M_1, \dots, M_r$  existe un número ( $M_0$ ) tal que después de un intervalo de tiempo finito, se presentan los modos deslizantes cerca de la trayectoria  $\bar{y}_0 = 0$  dado que cada componente de  $\bar{y}_0$  y su derivada con respecto al tiempo tiene diferentes signos (2.4.1).

De acuerdo con el método de control equivalente (sección 2.3), la solución de  $\dot{\bar{y}}_0 = 0$  junto con  $\bar{y}_0 = 0$ ,

$$(v_0)_{eq} = (M_0 \text{sign}(\bar{y}_0))_{eq} = A_{01} \bar{y}_1$$

Deberá ser sustituido en (6.3.14) para obtener la ecuación en modos deslizantes. Por lo tanto la señal de salida del filtro de primer orden  $z_1$  se aproxima al valor de la señal de entrada del control equivalente  $v_{0eq}$ :

$$\lim_{t_1 \rightarrow 0} z_1 = v_{0eq} = A_{01} \bar{y}_1 \quad \text{y} \quad \bar{y}_1 = \lim_{t_1 \rightarrow 0} A_{01}^+ z_1$$

De forma semejante,  $\bar{y}_2$  puede obtenerse desde el segundo bloque (subsistema con respecto a  $\bar{y}_1$ ).

$$\bar{y}_2 = \lim_{t_2 \rightarrow 0} A_{12}^+ z_2$$

Consecuentemente, los modos deslizantes acontecen en cada bloque, y entonces todos los subvectores  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r$  convergerán a cero. Debido a que



$y_i = \hat{y}_i + \bar{y}_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) todos los subvectores de los vectores de estado  $(y_1, \dots, y_r)$  incluyendo  $x$  podrán ser calculados.

### Comentarios 6.1

1.- El procedimiento es invariante con respecto a matrices  $A_i(t)$  de tamaño  $l_i \times (l_i + \dots + l_i)$  para  $i=0, \dots, r$ .

2.- No es obligatorio el uso de los modos deslizantes en el último bloque debido a que:

$$v_{r-1,eq} = A_{r-1,r}(t)\bar{y}_r$$

y los últimos subvectores  $y_r$  pueden obtenerse mediante:

$$y_r = \hat{y}_r + A_{r-1,r}^+(t)z_r$$

3.- Cuando exista un vector de perturbaciones desconocido  $f(t)$  en el último bloque,

$$\dot{y}_r = A_r(t)y_r + B_r(t)u + f(t) \quad f(t) \in \mathbb{R}^{l_r}$$

la ecuación de diferencia está en la forma

$$\dot{\bar{y}}_r = A_r(t)\bar{y}_r + f(t) - v_r$$

Después de presentarse los modos deslizantes en el subsistema,  $\bar{y}_r = 0$  y

$$v_{req} = f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t_f \rightarrow 0} z_f = v_{req} = f(t)$$

$$\text{si} \quad t_f \dot{z}_f + z_f = v_r.$$

Como se esperaba, el último bloque permite la obtención del vector de perturbaciones desconocido el cual incluye perturbaciones externas, variaciones en los parámetros y funciones de estado no lineales. Este concepto se explica en el capítulo 8 como uno de los métodos de supresión de chattering.

### 6.3.3 Resultados de la simulación

Como ejemplo ilustrativo del diseño de observadores, considere el siguiente sistema variante en el tiempo:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t)$$

$$y = C(t)x$$

donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & a_{03} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{20} & 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{00} & 0 \\ 0 & b_{11} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f(t) = [0 \quad 0 \quad f_2 \quad f_3]$$

Los elementos de las matrices coeficientes, las entradas y las perturbaciones son como se indica a continuación:

$$a_{00} = -4e^{-t} \quad a_{01} = -2 + \sin(t/2)$$

$$a_{11} = -5\cos(0.3t) \quad a_{23} = -2e^{-t}$$

$$a_{31} = -1 - \frac{\sqrt{t+2}}{t+1} \quad a_{33} = -2$$

$$a_{03} = a_{12} = a_{20} = -1$$

$$b_{00} = -3 \quad b_{11} = -5e^{-t/5}$$

$$c_{00} = 4 + \sin(t/2) \quad c_{10} = 2 - e^{-t/5}$$

$$c_{11} = -5 + 0.5\sin(-0.3t)$$

$$u_0 = 5\cos t \quad u_1 = -3$$

Para la matriz de salida  $C(t)$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} \\ 0 & c_{11} \end{bmatrix} = 2 \quad t \in [0, \infty)$$

El rango y la posición del menor principal de la matriz  $C(t)$  no varia con el tiempo.

El esquema Bloque-Observador se puede obtener fácilmente siguiendo el método descrito en este capítulo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

donde

$$y_0 = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} \\ 0 & c_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Los observadores, (6.3.11) hasta (6.3.14), tienen la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

donde  $v_0$  y  $v_1$  son entradas al observador:

$$v_0 = M_0 \text{sign}(y_0 - \hat{y}_0)$$

$$v_1 = M_1 \text{sign}(A_{01}^{-1} z_1)$$

$$\dot{t}_1 z_1 + z_1(t) = v_0(t)$$

$$z_1(0) = 0$$

La simulación se ejecuto para dos casos.

#### *Sistema sin perturbaciones*

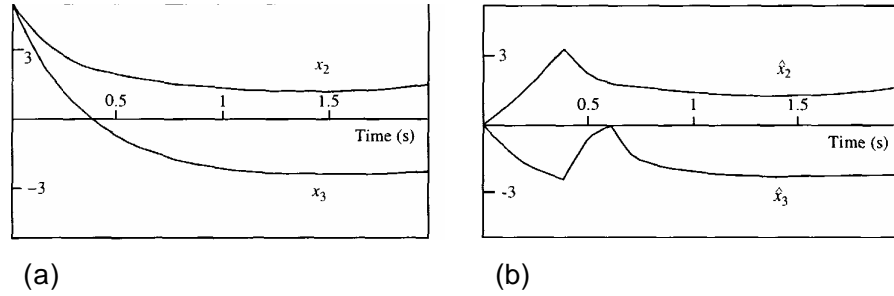
Los valores iniciales del estado del estado están dados por:

$$x_0(0) = x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 5$$

Debido a que las perturbaciones se suponen igual a cero, solo se considera la estimación del estado. Los valores iniciales del observador de estado son iguales a cero.

Debido a que el intervalo de muestreo  $T_s$  define la frecuencia de conmutacion, la constante del filtro  $t_1$ , la cual debe teóricamente acercarse a cero, se selecciona como  $4T_s$ . El intervalo de muestreo se selecciona para  $100 \mu s$ . La figura 6.1 describe los estados  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  y las salidas  $\hat{x}_2(t)$ ,  $\hat{x}_3(t)$  del observador en modos deslizantes. Observe como los estados estimados convergen rápidamente a los valores reales. Nuevamente las matrices  $M_0$  y  $M_1$  son:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$



**Figura 6.1** Valores para (a) Los valores de los estados reales  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$ , y (b) la salida del observador en modos deslizantes  $\hat{x}_2(t)$  y  $\hat{x}_3(t)$ .

### Sistema con perturbaciones

Debido a que las señales de perturbaciones  $f_2$ ,  $f_3$  necesitan ser estimadas, es necesario introducir un filtro adicional (comentario 6.1, punto 3):

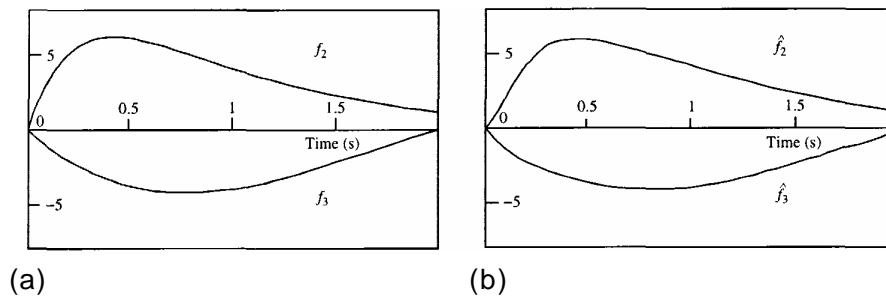
$$t_f \dot{z}_f + z_f(t) = v_1(t)$$

$$z_f(0) = [0 \ 0]^T$$

Las perturbaciones estimadas a la salida del filtro son:

$$\hat{f}(t) = z_f(t) \quad \hat{f}(t)^T = [\hat{f}_2(t) \ \hat{f}_3(t)]$$

La constante de tiempo  $t_f$  se selecciona en  $500 \text{ ms}$ . Las condiciones de simulación son las mismas que en el caso 1. La estimación de la respuesta en la figura 6.2 demuestra que las perturbaciones desconocidas pueden obtenerse mediante los observadores en modos deslizantes.



**Figura 6.2** Perturbaciones: (a) real, (b) estimado.

### Referencias bibliográficas

- Drakunov, S., 1983, On adaptive quasioptical filter with discontinuous parameters, *Automation and remote Control*, 44, 1167-75.
- Hashimoto, H. et al., 1990, VSS observer for linear time-varying system, *Proceedings of IECON'90, Pacific Grove CA*, pp.34-39.
- Kwakernaak, H. and Sivan, R., 1972, *Linear Optimal Control System*, New York: Interscience.
- Utkin, V., 1992, *Sliding modes in Control and Optimization*, Berlin: Springer-Verlag.

## OBSERVADORES EN MODOS DESLIZANTES