

CAPITULO CUATRO

Sistemas con Péndulos



El diseño de control utilizando modos deslizantes para sistemas no lineales de varias variables ha sido estudiado de manera extensa en muchos textos y periódicos. El procedimiento de diseño de tales sistemas de control no-lineal puede ser complicado y tener variantes de un caso a otro. El objetivo de este capítulo es el desarrollo de métodos de diseño para sistemas mecánicos no-lineales gobernados por un modelo matemático que tiene como base un juego de dos ecuaciones de segundo orden. El propósito de la aproximación supone que los sistemas de control se pueden transformar en una forma regular (Sección 3.3), la cual permite una desconexión de los sistemas controladores. Las leyes de control están ilustradas por diferentes sistemas con péndulos invertidos.

4.1 Metodología de diseño

Cuando diseñamos sistemas mecánicos, estamos tratando con un juego interrelacionado de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$$J(q)\ddot{q} = f(q, \dot{q}) + Bu \quad (4.1.1)$$

Donde $q \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, u es un vector de control de fuerzas y torques, elementos de una matriz B que pueden ser iguales a cero o a la unidad (0 o 1), y el rango de B igual a m . ($\text{rango}(B) = m$). En particular, para sistemas mecánicos rotacionales $J(q)$ es la matriz de inercia. El sistema puede estar bajoactuado, esto es cuando tiene menos entradas que grados de libertad y/o es inestable.

El sistema (4.1.1) puede ser representado en la forma de $2n$ ecuaciones de primer orden con respecto a los vectores q y \dot{q} . Entonces puede ser aplicada la forma regular como una aproximación. Aquí generalizaremos la aproximación para sistemas consistentes en bloques gobernados por el juego de ecuaciones de segundo orden. Por lo tanto esto puede ser aplicado para sistemas mecánicos no-lineales (4.1.1)

La matriz de inercia $J(q)$ no es singular en sistemas mecánicos, y B es una matriz de pleno-rango. Las componentes del vector q tal vez sean reordenadas en ecuaciones de movimiento.

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= \tilde{f}_1(q, \dot{q}) + \tilde{B}_1(q)u \\ \ddot{q}_2 &= \tilde{f}_2(q, \dot{q}) + \tilde{B}_2(q)u\end{aligned}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad q_1 \in R^{n-m}, \quad q_2 \in \Re^m \quad \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix} = J^{-1}f \quad \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = J^{-1}B, \quad \det(\tilde{B}_2) \neq 0 \quad (4.1.2)$$

Conforme a la técnica de forma regular, tal como se dispuso en la sección 3.3, la transformación de coordenadas $z = f(q) \in \Re^{n-m}$, $y = q_2$ con la función continua diferenciable $f(q)$ podría encontrarse que se cumple la condición

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q} J^{-1}B = 0$$

Por consiguiente:

$$\dot{z} = \frac{\partial f(q)}{\partial q} \dot{q} \quad \ddot{z} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) \dot{q}^2 + \frac{\partial f(q)}{\partial q} J^{-1}(f + Bu)$$

y la ecuación del sistema mecánico se reduce a la forma regular consistente en un juego de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= f_1(z, y, \dot{z}, \dot{y}) \\ \dot{y} &= f_2(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + B_2(z, y)u \quad \det(B_2) \neq 0\end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Para la forma regular con bloques que consisten en ecuaciones de primer orden (sección 3.3) el estado bloque inferior fue manejado como control en el bloque superior. La dependencia deseada entre los dos subvectores fue condicionada por la imposición de modos deslizantes.

En nuestro caso la ecuación de alto bloque (4.1.3) depende de los dos vectores, y y \dot{y} . Este hecho introduce algunas peculiaridades las cuales podrían tomar importancia cuando se diseñan sistemas de control por modos deslizantes. Además, la estabilización exigida por los diferentes tipos de sistemas mecánicos será estudiada posteriormente. Esto se asume dado que el origen en el espacio de estado del sistema es un punto de equilibrio de un sistema de lazo abierto.

$$\begin{aligned}f_1(0,0,0,0) &= 0 \\ f_2(0,0,0,0) &= 0\end{aligned}$$

Caso 1

Primero, la estabilidad del sistema de dinámica cero con el vector y como salida está restringida. Esta es gobernada por la primera ecuación (4.1.3) con $y = 0$, $\dot{y} = 0$:

$$\ddot{z} = f_1(z, 0, \dot{z}, 0) \quad (4.1.4)$$

Si son estables entonces el modo deslizante impone la variable $s = \dot{y} + cy = 0$ con el parámetro escalar $c > 0$. Esta es una exigencia simple después de que el rango de B_2 es igual a m $\text{rango}(B_2) = m$ y puede aplicarse algún método de imposición de modos deslizantes de los utilizados en la sección 3.2 y 3.4. Después de iniciar con modos deslizantes en la variable $s = 0$ el estado y tendencia a cero como una solución para $\dot{y} + cy = 0$, y debido a la estabilidad de la solución cero de (4.1.4), z por consiguiente decrece también.

Caso 2

Ahora la estabilidad del sistema de dinámica cero con el vector z como salida está restringida. Si $z(t) \equiv 0$ entonces las ecuaciones de dinámica cero son obtenidas del alto bloque de (4.1.3):

$$f_1(0, y, 0, \dot{y}) = 0 \quad (4.1.5)$$

Aquí, la dinámica cero es un juego de ecuaciones diferenciales de primer orden mientras que en el caso 1 éstas son un juego de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Si la dinámica cero es estable entonces el modo deslizante impone en la variable

$$s = f_1 + c_1 z + c_2 \dot{z} = 0$$

Después modo deslizante inicia,

$$\ddot{z} = -c_1 \dot{z} - c_2 z \quad (4.1.6)$$

y la ecuación para z en (4.1.3) es de la forma

$$\ddot{z} = -c_1 \dot{z} - c_2 z \quad (4.1.7)$$

Para los parámetros escalares positivos c_1 y c_2 la solución para (4.1.7) tiende a cero y entonces $y(t)$ como una solución para (4.1.6) tiende a cero también. Este método de estabilización para sistemas con dinámica cero estable es aplicable si

$$\text{rango} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} B_2 \right) \geq \dim(s) = \dim(z)$$

Entonces $\dot{s} = F(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}} \right) B_2 u$ (F es una función independiente del control u) y como sé

Demostro en la sección 3.2, pueden imponerse modos deslizantes. Hablando generalmente, esta condición predomina mientras $\dim(z) \leq \dim(y)$

Caso 3

Nosotros asumimos que la función f_1 en (4.1.3) no depende de \dot{y} es decir $f_1 = f_1(z, y, \dot{z})$. Si la condición (4.1.6) predomina, entonces z y \dot{z} tienden a cero. Posteriormente que z decrece, y se determina de la ecuación algebraica $f_1(0, y, 0) = 0$. Desde el origen del espacio de estado es el punto de equilibrio $f_1(0, 0, 0) = 0$ la coordenada y tiende a cero también. Para asegurarse de que se cumpla la condición (4.1.6), el múltiple switcheo es seleccionado como

$$s = s_1 + \mathbf{a}s_1 = 0 \quad (\mathbf{a} > 0)$$

Con $s_1 = f_1 + c_1 z + c_2 \dot{z}$. Las derivadas de tiempo de s_1 y s son de la forma

$$\dot{s}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y} \dot{y} + F_1(z, y, \dot{z})$$

donde la función $F_1(z, y, \dot{z})$ no depende de \dot{y} ni del control y $\dot{s} = F(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + \frac{\partial f_1}{\partial y} B_2 u$

Donde la función $F(z, y, \dot{z}, \dot{y})$ no depende del control.

En cuanto al caso 2, puede imponerse modos deslizantes en el caso $s = 0$ si predomina la condición (4.1.8). En modos deslizantes, $s_1(t)$ disminuye como una solución para la ecuación $\dot{s}_1 + \mathbf{a}s_1 = 0$. Esto significa que la condición (4.1.6) predomina y $z(t)$, $\dot{z}(t)$ y $y(t)$ tienden a cero.

Caso 4

Vamos a asumir que la condición (4.1.8) predomina y considerando el caso especial de la función

$$f_1 = f_{11}(y)\dot{y} + f_{12}(z, y, \dot{z})$$

La cual es lineal con respecto a \dot{y} y la dinámica cero gobernada por $f_{11}(y)\dot{y} + f_{12}(0, y, 0) = 0$ es inestable (de otra manera puede aplicarse el método de diseño del caso 2). Entonces la primera ecuación de (4.1.3) con respecto a las nuevas variables

$$z_1 = \dot{z} - g(y), \quad z_2 = z \quad (z_1, z_2 \in \mathfrak{R}^{n-m})$$

se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f'_{12}(z_1, z_2, y) + f_{11}(y)\dot{y} - \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} \\ \dot{z}_2 &= z_1 + g(y) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right\} \quad (i = 1, \dots, n-m; \quad j = 1, \dots, m)$$

$$f'_{12}(z_1, z_2, y) = f_{12}(z_2, y, z_1 + g(y))$$

Si la función $g(y)$ es una solución para la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f_{11}(y) \quad (4.1.10)$$

entonces el sistema (4.1.9) se reduce a

$$\dot{p} = F(p, y) \quad p = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f'_{12}(z_1, z_2, y) \\ z_1 + g(y) \end{bmatrix} \quad (4.1.11)$$

En el sistema de orden reducido (4.1.11) el estado del segundo bloque en (4.1.3), y es manejada como control $(n - m)$ -dimensional. Por ejemplo, esto es posible eligiendo

$$y = -s_0(p) \quad (4.1.12)$$

de tal forma que el sistema

$\dot{p} = F(p, -s_0(p))$ Es asintoticamente estable. La relación (4.1.12) es valida si modos deslizantes impone la variable $s = y + s_0(p) = 0$

Similar para el caso 2 esto puede hacerse después de imponer (4.1.8) por nuestra suposición.

Observación 4.1

Los procedimientos de diseño para los casos del 2 al 4 fueron desarrollados bajo la suposición (4.1.8). Si esta condición no predomina, quizá, sea aplicable un procedimiento de pasos múltiples, de la misma forma que fue descrita en Luk'yanov (1993) y Luk'yanov y Dodds (1996).

En la sección 5.6 será descrito un ejemplo de diseño de dos pasos para sistemas lineales de tiempo variable. En esta sección serán estudiados tres sistemas con péndulos no lineales basados en los procedimientos de diseño citados con anterioridad. Serán demostrados los procedimientos específicos de diseño para seleccionar un tipo de deslizamiento y de control discontinuo, para los sistemas de péndulo-carretilla, péndulo doble invertido, y péndulo rotacional invertido. Los estudios teóricos serán complementados por simulación y por los resultados experimentales.

Péndulo-carretilla

La figura 4.1 muestra el modelo físico de un sistema combinado péndulo-carretilla. M y m son las masas de la carretilla y del péndulo invertido, respectivamente; l es la distancia existente entre el centro de gravedad del péndulo invertido y el punto de enlace entre la carretilla y el péndulo. La coordenada x representa la posición de la carretilla sobre el eje horizontal respecto a un punto fijo, y q es el ángulo rotacional del péndulo. Utilizando el método de las ecuaciones de Lagrange, una de estas puede demostrar fácilmente que las ecuaciones de movimiento del péndulo-carretilla (Mori et al; 1976) son

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{q}\cos q - ml\dot{q}^2\sin q = u \\ \frac{4}{3}ml\ddot{q} + m\ddot{x}\cos q - mg\sin q = 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

La finalidad del control es estabilizar el sistema donde el péndulo está en la posición vertical inestable $q = 0$ y la carretilla está como un punto dado sobre la línea recta $x = 0$ bajo la acción de la fuerza de control. Esto se asume dado que los parámetros y el vector de estado es útil. Por conveniencia de diseño, nosotros describimos el sistema dado (4.2.1) con respecto a la segunda derivada de las coordenadas x y q como

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{k} \left(-mg\cos q \sin q + \frac{4}{3}u^* \right) \\ \ddot{q} = \frac{1}{kl} \left((M+m)g \sin q - u^* \cos q \right) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

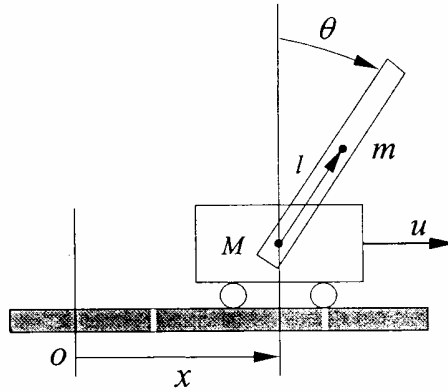


Figura 4.1 Sistema carretilla péndulo.

Donde

$$k = \frac{4}{3}(M+m) - m \cdot \cos^2(q) > 0$$

y

$$u^* = u + ml\dot{q}^2 \cdot \sin(q) \quad (4.2.3)$$

El sistema (4.2.3) con control escalar u^* es de la forma (4.1.2) con

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3k \\ -(\cos q)/kl \end{bmatrix}$$

para reducir el sistema a la forma regular (4.1.3), transformación de coordenadas

$$y = f(x, q)$$

se debe encontrar tal que la ecuación del diferencial del segundo orden con respecto a y no dependa del control u^* . La solución al problema esta dada en la sección 3.3. Según (3.3.5) a (3.3.8),

$$\begin{aligned} y &= f(x, q) \\ &= x - j(q) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

donde $j(q)$ es la solución a la ecuación

$$\frac{dj}{dq} = \frac{\tilde{B}_1}{\tilde{B}_2}$$

o

$$\frac{dj}{dq} = \frac{4l}{3 \cos q}$$

La transformación de coordenadas (4.2.4) con la solución a esta ecuación

$$f(q) = -\frac{4l}{3} \ln \frac{1 + \tan(q/2)}{1 - \tan(q/2)}$$

resulta en

$$\dot{y} = \dot{x} + \frac{4l}{3} \frac{\dot{q}}{\cos q}$$

y

$$\ddot{y} = \ddot{x} + \frac{4l}{3} \frac{\ddot{q}}{\cos q} + \frac{4l}{3} \frac{q\dot{q}}{\cos^2 q} \quad (4.2.5)$$

La forma regular del sistema obtenido de las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.5) es en la forma

$$\ddot{y} = G(q, \dot{q}) \tan(q) \quad (4.2.6)$$

$$\ddot{q} = v(q, u^*)$$

Donde

$$G(q, \dot{q}) = \frac{g}{k} \left(\left(\frac{4}{3} - \cos^2 q \right) m + \frac{4}{3} M \right) + \frac{4l}{3} \frac{\dot{q}^2}{\cos q}$$

y

$$v(q, u^*) = \frac{1}{kl} \left((M + m)g \sin q - u^* \cos q \right) \quad (4.2.7)$$

el control de un sistema del no lineal (4.2.6) se encuentra como sigue.

Paso 1

Considerando la primera ecuación de sistema (4.2.6). La función denotada como $G(q, \dot{q})$ es positiva para cualquier valor del argumento sí $-p/2 > q < p/2$. La función $\tan(q)$ se maneja como control basado en la opción propuesta en (4.1.6). Por este control intermedio, eligiendo $\tan(q)$ [como una combinación lineal de y y \dot{y}]

$$\tan(\mathbf{q}) = \mathbf{a}_1 s_2 \quad (\mathbf{a}_1 > 0 \quad s_2 > y + \dot{y}) \quad (4.2.8)$$

entonces la ecuación superior de sistema (4.2.6) se representa como

$$\dot{y} = -y + s_2$$

$$\dot{s}_2 = -y - (\mathbf{a}_1 G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 1) s_2$$

La derivada de la función candidata de Lyapunov respecto al tiempo

$$V = \frac{1}{2} (y^2 + s_2^2)$$

con $V=0$ en el origen $(y, s_2) = (0,0)$ es

$$\dot{V} = -y^2 - (\mathbf{a}_1 G - 1) s_2^2$$

Dado que $G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ para $-\mathbf{p}/2 > \mathbf{q} < \mathbf{p}/2$ observándose que $\dot{V} < 0$ para $\mathbf{a}_1 G > 1$, i.e. el diseño del parámetro \mathbf{a}_1 puede ser elegido tal que $\mathbf{a}_1 > 1/G > 0$ para cualquier t . Por consiguiente el punto de equilibrio es asintóticamente estable con $y \rightarrow 0$ y $s_2 \rightarrow 0$ así como $t \rightarrow \infty$ consecuentemente $(x, \mathbf{q}) \rightarrow (0,0)$, como sigue de (4.2.4) y (4.2.8).

Para implementar el control intermedio(4.2.8), el control u^* se diseñará tal que la función $s_1 = \tan(\mathbf{q}) + \mathbf{a}_1 (y + \dot{y}) \rightarrow 0$ así como $t \rightarrow \infty$, entonces $\tan(\mathbf{q}) \rightarrow -\mathbf{a}_1 (y + \dot{y})$.

paso 2

La función s_1 tiende a cero asintóticamente, si es una solución a la ecuación del diferencial

$$\dot{s}_1 = -\frac{\mathbf{a}_1}{\cos^2 \mathbf{q}} s_1$$

o

$$s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, y, \dot{y}) = \cos^2 \mathbf{q} \cdot \dot{s}_1 + \mathbf{a}_1 s_1 = 0$$

con

$$s_1 = \tan(\mathbf{q}) + \mathbf{a}_1 (y + \dot{y}) \text{ y } \dot{s}_1 = \frac{1}{\cos^2 \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_1 (\dot{y} + G \tan \mathbf{q})$$

Paso 3

En orden de importancia para asignar la ley de control tal que

$$s = \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_1 \cos^2 \mathbf{q} (\dot{y} + G \tan \mathbf{q}) + \mathbf{a} s_1 = 0$$

calculando la derivada respecto al tiempo de la función s a lo largo de las soluciones (4.2.6)

$$\dot{s} = \mathbf{y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) v + F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{y}) \quad (4.2.9)$$

Donde

$$\mathbf{y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 1 + \frac{8}{3} \mathbf{a}_1 l(\sin \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

y

$$F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{a}_1(\cos^2 \mathbf{q})G \tan \mathbf{q} + \mathbf{a}\dot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{a}_1(G - 2(\cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q})\dot{\mathbf{y}} - 2G \sin^2 \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ + \mathbf{a}_1 \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} \left(\frac{2gm}{k} \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} + \frac{4}{3} l \dot{\mathbf{q}}^2 \frac{\sin \mathbf{q}}{\cos^2 \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}}$$

estado alcanza la superficie $s = 0$ para cualquier condición inicial y modo deslizante existe en cualquier punto de la superficie si la desviación de la superficie s y su derivada respecto al tiempo tienen signos opuestos. Se satisface esta condición

$$v = -v_0 \text{sign}(s\mathbf{y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \quad (4.2.10)$$

donde

$$v_0 \geq \frac{1}{|\mathbf{y}|_{\min}} |F|_{\max}$$

Finalmente, el control real se obtiene de (4.2.10), (4.2.7) y (4.2.3):

$$u = \frac{1}{\cos \mathbf{q}} (((M + m)g \sin \mathbf{q} - ml \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} \dot{\mathbf{q}}^2) + klv_0 \text{sign}(s\mathbf{y}))$$

Note que el modo deslizante puede desaparecer si $\mathbf{y} = 0$ donde \dot{s} en (4.2.9) no depende del control v para $\mathbf{y} = 0$. En una parte la función \mathbf{y} es positivo para el dominio $8\mathbf{a}_1/(\sin \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} > -3$ incluyendo el origen. En la parte el dominio es

$$\frac{9}{64\mathbf{a}_1^2 l^2} \frac{\cos \mathbf{q}}{\sin^2 \mathbf{q}} > (\sin \mathbf{q})v_0 \quad (4.2.11)$$

una trayectoria del sistema puede intersectar la superficie $\mathbf{y} = 0$ una sola vez. Para derivar esta condición, calculando la derivada respecto al tiempo de la función \mathbf{y} en trayectorias del sistema para los puntos en la superficie $\mathbf{y} = 0$:

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{8}{3} \mathbf{a}_1 l ((\cos \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^2 + (\sin \mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}) = \frac{8}{3} \mathbf{a}_1 l \left(\frac{9}{64\mathbf{a}_1^2 l^2} \frac{\cos \mathbf{q}}{\sin^2 \mathbf{q}} - (\sin \mathbf{q})v_0 \text{sign}(s\mathbf{y}) \right)$$

está claro que $\dot{\mathbf{y}} > 0$ si la condición (4.2.11) se mantiene y muestra que el dominio de modo deslizante, incluso el punto de equilibrio, existe.

4.2 Péndulo doble invertido

Considerando un sistema más complicado que consta de dos péndulos rotatorios invertidos como se muestran en Figura 4.2. Se compone cada eslabón del péndulo de masa, m_i e inercia I_i . La longitud total de cada eslabón es L_i y la distancia del centro de gravedad de cada eslabón a su punto del pivote es l_i , ($i = 1, 2$); \mathbf{q} se refiere al ángulo rotatorio del eje vertical. Se asume esa única fuerza de control, el torque de motor $F_I = u$, está disponible. El movimiento del sistema dinámico es gobernado por la ecuación siguiente (Ledgerwood y Misawa, 1992):

$$H \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + W = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

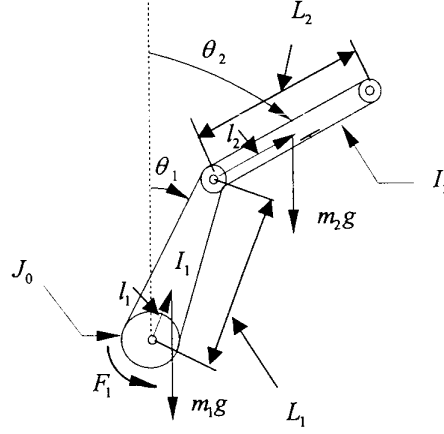


Figura 4.2 El sistema del péndulo rotatorio invertido.

con matrices

$$H = \begin{bmatrix} j_0 + I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 I_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ m_2 L_1 I_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} -g(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \mathbf{q}_1 \\ -m_2 g I_2 \sin \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}$$

y

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -V \dot{\mathbf{q}}_2 \\ -V \dot{\mathbf{q}}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

El objetivo de control es manejar el sistema mecánico desde un estado perturbado al punto deseado de equilibrio $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = 0$ y mantenerse allí. Primero, volvemos a escribir las ecuaciones de la planta dadas como

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_1 &= f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2) + \frac{1}{\Delta} H_{22} u \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2) - \frac{1}{\Delta} H_{12} u \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

donde

$$f_1 = \frac{1}{\Delta} (-H_{22}(P_{11}\dot{\mathbf{q}}_1 + P_{12}\dot{\mathbf{q}}_2 + W_1) + H_{12}(P_{21}\dot{\mathbf{q}}_1 + P_{22}\dot{\mathbf{q}}_2 + W_2 - F_2))$$

$$f_2 = \frac{1}{\Delta} (H_{12}(P_{11}\dot{\mathbf{q}}_1 + P_{12}\dot{\mathbf{q}}_2 + W_1) - H_{11}(P_{21}\dot{\mathbf{q}}_1 + P_{22}\dot{\mathbf{q}}_2 + W_2 - F_2))$$

$$\Delta = H_{11}H_{22} - H_{12}^2 > 0$$

Entonces la matriz de inercia H es definida positiva.

y H_{ij} , P_{ij} , W_i ($i, j = 1, 2$) es elementos de las matrices H , P y el vector W .
Primero escribiendo la ecuación del movimiento (4.3.2) en la forma

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_2 &= f_2 - \frac{1}{\Delta} H_{12} u \\ \ddot{y} &= f_1 - f_2 + \frac{1}{\Delta} (H_{22} + H_{12}) u \\ y &= \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

El sistema (4.3.3) está en la forma (4.1.2) con

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1 &= -\frac{1}{\Delta} H_{12} = A_1 \cos(y) \\ \tilde{B}_2 &= \frac{1}{\Delta} (H_{22} + A_1 \cos(y)) \\ A_1 &= m_2 L_1 l_2\end{aligned}$$

Similar a la carreta-péndulo en la Sección 4.2, una transformación no lineal se debe encontrar para reducir (4.3.3) a la forma regular

$$z = \mathbf{q}_2 - \mathbf{j}(y)$$

donde $\mathbf{j}(y)$ es una solución a la ecuación

$$\frac{d\mathbf{j}}{dy} = \frac{\tilde{B}_1}{\tilde{B}_2}$$

o

$$\frac{d\mathbf{j}}{dy} = -\frac{\cos y}{a + \cos y} \quad \text{con } a = \frac{m_2 l_2^2 + I_2}{m_2 L_1 l_2}$$

continuando con nuestro estudio para el caso $a > 1$. Entonces

$$\mathbf{j}(y) = -y - \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \tan \left(\frac{y}{2} \right) \right)$$

$$z = \mathbf{q}_2 + y + \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \tan \left(\frac{y}{2} \right) \right)$$

$$\dot{z} = \dot{\mathbf{q}}_2 + y + \frac{\cos y}{a + \cos y} \dot{y}$$

$$\ddot{z} = \ddot{\mathbf{q}}_2 + \frac{\cos y}{a + \cos y} \ddot{y} - \frac{a \sin y}{(a + \cos y)^2} \dot{y}^2$$

y el sistema en coordenadas transformadas se representa por

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= G_1(z, y, \dot{z}, \dot{y}) \\ \ddot{y} &= G_2(z, y, \dot{z}, \dot{y}) + \tilde{B}_2(y)u \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{a \sin y}{a + \cos y} \left(\left(\dot{z} + \frac{a}{a + \cos y} \dot{y} \right)^2 - \frac{a}{a + \cos y} \dot{y}^2 \right) + \frac{A_2}{A_1(a + \cos y)} \sin(z - \mathbf{j}(y)) \\ G_2 &= -\frac{1}{\Delta} \left((H_{22} + A_1 \cos y) \left(A_1 \sin y \left(\dot{z} + \frac{a}{a + \cos y} \dot{y} \right)^2 - A_3 \sin(z - \mathbf{j}(y)) \right) \right. \\ &\quad \left. (H_{11} + A_1 \cos y) \left(A_1 \sin y \left(\dot{z} + \frac{a}{a + \cos y} \dot{y} \right)^2 + A_2 \sin(z - \mathbf{j}(y)) \right) \right) \end{aligned}$$

Los coeficientes constantes $A_2 = m_2 g l_2$, $A_3 = g(m_1 l_1 + m_2 L_1)$ y \tilde{B}_2 son positivos para $-\mathbf{p}/2 > y < \mathbf{p}/2$. El modo de control deslizante se diseñará de nuevo usando la propuesta de aproximación por desacoplamiento.

Paso 1

yo nosotros consideramos la misma opción para la variable deslizante como en el ejemplo anterior péndulo-carrito. así el último término de la función G_1 se puede forzar a

$$\sin(z - \mathbf{j}(y)) = -k_1 z - k_2 \dot{z} \quad (4.3.5)$$

entonces la dinámica superior de segundo orden del sistema (4.3.4) está dada por

$$\ddot{z} = \mathbf{g} - G(k_1 z - k_2 \dot{z}) \quad (4.3.6)$$

donde

$$G_1 = \frac{A_2}{A_1(a + \cos y)} > 0$$

y

$$\mathbf{g} = \frac{a \sin y}{a + \cos y} \left(\left(\dot{z} + \frac{a}{a + \cos y} \dot{y} \right)^2 - \frac{a}{a + \cos y} \dot{y}^2 \right)$$

El análisis de la estabilidad del sistema (4.3.6) es más complicado que para nuestro primer ejemplo en la Sección 4.2. Mostraremos cualitativamente que existe un dominio de atracción incluyendo el origen en el espacio del estado (z, \dot{z}, y, \dot{y}) .

Primero mostraremos que el punto de equilibrio $z = 0, \dot{z} = 0$ es estable asintóticamente para el sistema (4.3.6) con $\mathbf{g} = 0$. Las ecuaciones del movimiento con respecto a z y $s_2 = k_1 z - k_2 \dot{z}$ son

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{k_1}{k_2} z + \frac{1}{k_1} s_2 \\ \dot{s}_2 &= \frac{k_1^2}{k_2} z + \frac{k_1}{k_2} s_2 - k_2 G s_2 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Por la función candidato de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (k_1^2 z^2 + s_2^2)$$

Calculando la derivada respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema dada por (4.3.7):

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1^3}{k_2} z^2 - \left(k_2 G - \frac{k_1}{k_2} \right) s_2^2 \right)$$

La función $G > A_2/A_1(a+1)$ -ver ecuación (4.3.6)- por consiguiente son positivos k_1 y k_2 se puede encontrar como

$$\frac{k_1}{k_2^2} < \frac{A_2}{A_1(a+1)} \quad \text{entonces} \quad \dot{V} < 0$$

que implica que el punto de equilibrio del sistema (4.3.6) con $\mathbf{g} = 0$ es estable asintóticamente.

La función de estado \mathbf{g} es de un valor pequeño de tercer orden con respecto a las desviaciones pequeñas del origen. De allí existe un dominio limitado por condiciones iniciales por lo tanto origen en el espacio estado (z, \dot{z}, y, \dot{y}) es estable asintóticamente también.

Paso 2

La condición (4.3.5) está equivalente a

$$s_1 = \sin(z - \mathbf{j}(y)) + k_1 z + k_2 \dot{z} = 0$$

La función s_1 satisface la ecuación lineal de primer orden

$$\dot{s}_1 = -\mathbf{I} s_1 \quad (4.3.8)$$

con soluciones estables para constantes positivas $\mathbf{I} > 0$ si

$$\dot{y} = \frac{a + \cos y}{\cos y \cos(z - \mathbf{j}(y))} (\cos(z - \mathbf{j}(y)) \dot{z} + k_1 \dot{z} + k_2 \ddot{z} + \mathbf{I} s_1)$$

entonces

$$\dot{s}_1 = \frac{-\cos y}{a + \cos y} (\cos(z - \mathbf{j}(y)) \dot{y} + \cos(z - \mathbf{j}(y)) \dot{z} + k_1 \dot{z} + k_2 \ddot{z})$$

(Asumimos que las magnitudes de y y $(z - \mathbf{j}(y))$ son menores que $\mathbf{p} / 2$.)

Paso 3

para satisfacer ecuación (4.3.9), el control u puede ser elegido para forzar el modo deslizante en la superficie

$$s = \dot{y} \frac{a + \cos y}{\cos y \cos(z - \mathbf{j}(y))} (\cos(z - \mathbf{j}(y)) \dot{z} + k_1 \dot{z} + k_2 \ddot{z}) - \mathbf{I} s_1 = 0$$

entonces solo las derivada de ambos \dot{y} y $\ddot{z}(z, y, \dot{z}, \dot{y})$ dependen de la fuerza de control u , que podemos obtener

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \mathbf{y}_1(y, z, \dot{y}, \dot{z}) \ddot{y} - \mathbf{y}_2(y, z, \dot{y}, \dot{z}) = \mathbf{y}_1(y, z, \dot{y}, \dot{z}) (G_2 + \tilde{B}_2 u) - \mathbf{y}_2(y, z, \dot{y}, \dot{z}) \\ &= \mathbf{y}_1(y, z, \dot{y}, \dot{z}) \tilde{B}_2 u - \tilde{\mathbf{y}}_2(y, z, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned}$$

$$\text{Donde } \mathbf{y}_1 = 1 - \frac{2ak_2 \tan y}{(a + \cos y) \cos(z - \mathbf{j}(y))} \left(\dot{z} - \frac{\cos y}{(a + \cos y)} \dot{y} \right)$$

con \mathbf{y}_2 y $\tilde{\mathbf{y}}_2$ como funciones continuas independiente del control.

De nuevo, para algunos dominios limitados, las funciones s , \mathbf{y}_1 , $\tilde{\mathbf{y}}_2$ existen y $\mathbf{y}_1 > 0$. La función \tilde{B}_2 siempre está definida positiva, por consiguiente el modo deslizante existe para este dominio en el sistema con el control discontinuo

$$u = -u_0 \text{sign}(s)$$

$$u_0 > \frac{1}{(\mathbf{y}_1 \tilde{\mathbf{B}}_2)_{\min}} |\mathbf{y}_2|_{\max} \quad (4.3.10)$$

Entonces las funciones s y \dot{s} tiene signos opuestos. Después el modo deslizante ocurre, la función s_1 tiende a cero como una solución a (4.3.8), mientras que (4.3.5) se mantiene. De las componentes de estado z y y , y por consiguiente \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 , tienden a cero.

4.3.1 resultados de Simulación

El algoritmos de control propuesto para el segundo ejemplo, un péndulo doble invertido, se verificó por la simulación en computadora de los siguientes resultados. Se toman parámetros del sistema del péndulo de un modelo real usado en Ledgerwood y Misawa (1992) listado en la tabla 4.1. El método de diseño para el control por modos deslizantes es válido por el parámetro $a > 1$. Para el conjunto de parámetros de la tabla 4.1, $a = 1.15$.

Parámetro	Parámetro
$m_1 = 0.132 \text{ kg}$	$I_1 = 0.00362 \text{ kg m}^2$
$m_2 = 0.088 \text{ kg}$	$I_2 = 12 \text{ } 0.001 \text{ } 14 \text{ kg m}^2$
$L_1 = 0.2032 \text{ m}$	$J_0 = 0.000 \text{ } 06 \text{ kg m}^2$
$L_2 = 0.2540 \text{ m}$	
$l_1 = 0.1574 \text{ m}$	
$l_2 = 0.1109 \text{ m}$	$g = 9.8 \text{ m s}^2$

La figura 4.3 muestra que los resultados usan la ley de control de modos deslizantes (4.3.9) con las ganancias de $k_1 = k_2 = 0.174$, $\mathbf{I} = 35$ y $u_0 = 1$. Ambos eslabones como se muestran en la Figura 4.3(a) son balanceados en la posición del plano vertical $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = 0$. Se muestran en la Figura 4.3(a) las velocidades angulares. el control del torque se muestra en la figura 4.3(c)

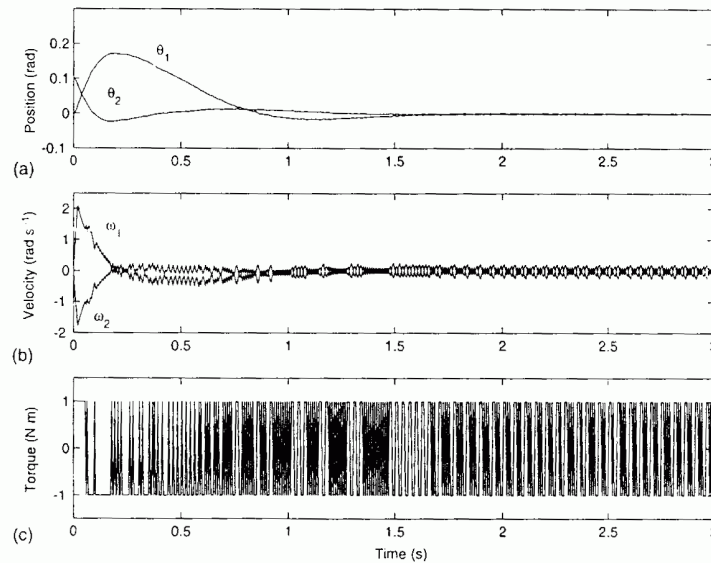


Figura 4.3 Resultados usando SMC con $\mathbf{q}_2(0) = 0.1$ rad.

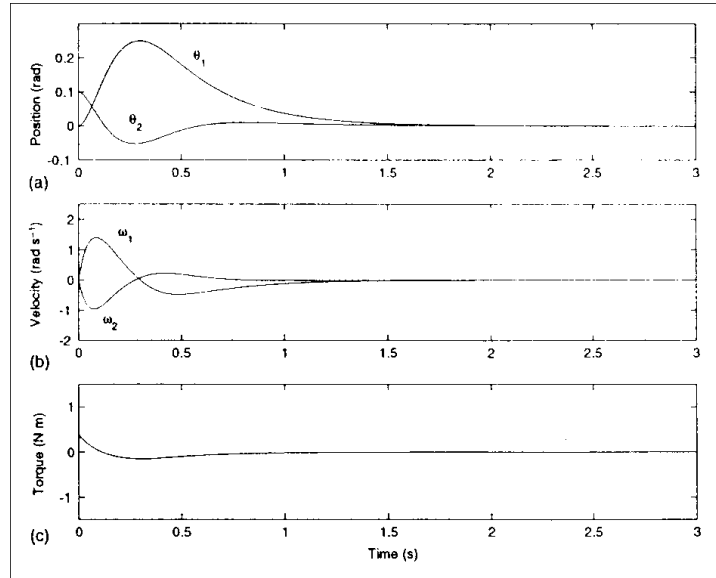


Figura 4.4 Resultados usando LQR con $\mathbf{q}_2(0) = 0.1$ rad.

De los resultados de la Simulación se obtuvieron usando un regulador cuadrático lineal (LQR) con control $u = 0.0001\mathbf{q}_1 + 3.7388\mathbf{q}_2 + 0.3218\dot{\mathbf{q}}_1 + 0.5597\dot{\mathbf{q}}_2$ se muestran en la Figura 4.4 Ambos LQR y control por modos deslizantes (SMC) pueden mantener el péndulo en el punto de equilibrio inestable $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (0,0)$ para un valor pequeño en la condición inicial $\mathbf{q}_2(0) = 0.1$ rad. Entonces se probaron ambos tipos de controladores para un estado inicial perturbado de \mathbf{q}_2 . Como se puede ver en Figura 4.5, el modo de control deslizante puede manejar sistemas con control no lineales con un valor inicial de hasta $\mathbf{q}_2(0) = 0.49$ rad 28° . El aproximamiento lineal (LQR) puede estabilizar el sistema dentro del rango $\mathbf{q}_2(0) = 0.32$ rad $\approx 18.3^\circ$ (Figura 4.6).

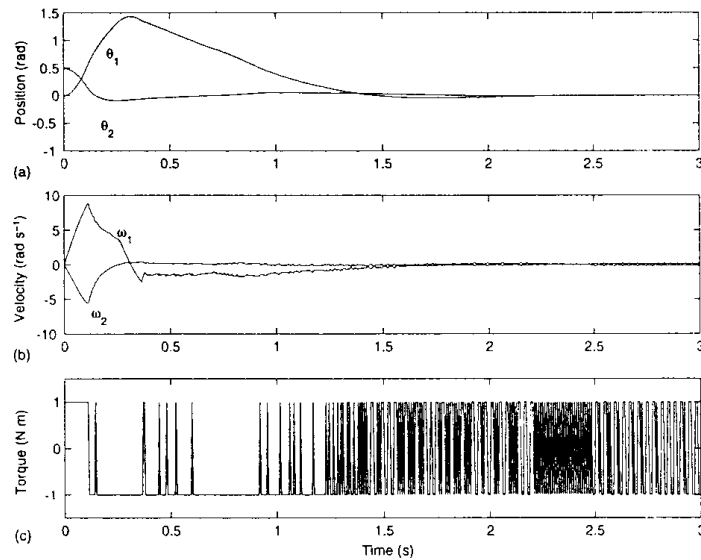


Figura 4.5 Resulta usa SMC con $\mathbf{q}_2(0) = 0.49$ rad.

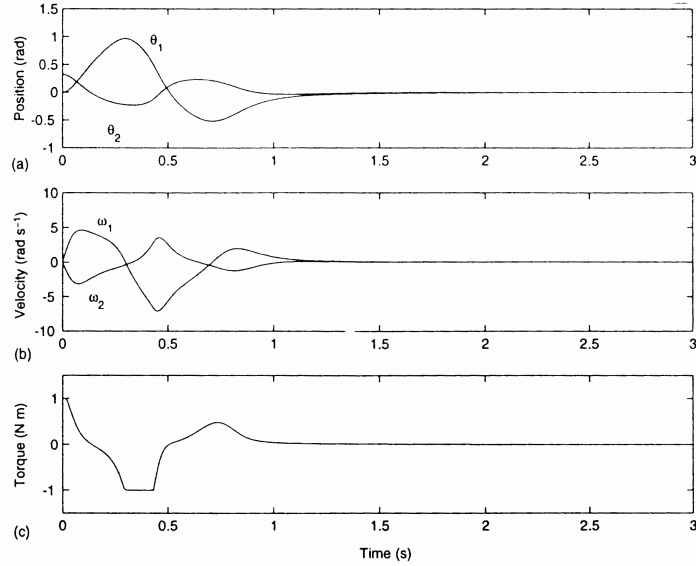


Figura 4.6 Resultados usando LQR con $\mathbf{q}_2(0) = 0.32$ rad.

4.4.1 Sistema de péndulo rotatorio invertido

Un sistema del péndulo rotatorio invertido como describió Widjaja (1994) se considera en esta sección. Figura 4.7 muestra que la planta consta de una base rotatoria y un péndulo. Los Parámetros m_l y J_l es la masa e inercia del péndulo, i_l es la distancia del centro de gravedad del eslabón a su punto del pivote, g es la aceleración gravitacional, y C_l es la constante de fricción entre el péndulo y la base rotatoria. La coordenada \mathbf{q}_0 representa el ángulo rotatorio de la base con respecto a algún eje horizontal (normalmente definida como la posición de arranque) y \mathbf{q}_1 el ángulo rotacional del péndulo con respecto al eje vertical. $\mathbf{q}_1 = 0$ referido al punto inestable de equilibrio.

Las ecuaciones dinámicas del sistema son representadas por

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_0 &= -a_p \dot{\mathbf{q}}_0 + K_p u \\ \ddot{\mathbf{q}}_1 &= -\frac{C_l}{J_l} \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{m_l g l_l}{J_l} \sin \mathbf{q}_1 + \frac{K_l}{J_l} \ddot{\mathbf{q}}_0\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

La ecuación superior es una simplificación del modelo de un imán permanente usado por un motor utilizado para controlar la base rotatoria con constantes a_p y K_p . La más baja ecuación de sistema (4.4.1) representa la dinámica del péndulo; K_l es una constante proporcional. El signo de K_l depende de la posición del péndulo: $K_l < 0$ para la posición invertida y $K_l > 0$ para la posición no invertida. El voltaje de la armadura aplicado u es el sólo una entrada de control del sistema.

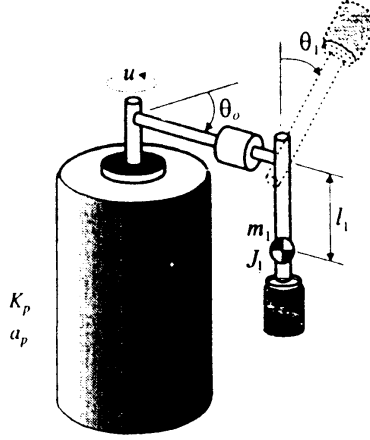


Figura 4.7 péndulo Invertido con base rotatoria.

Como se dijo en Widjaja (1994), el sistema del péndulo invertido incluye varios problemas de control: balance-arriba, balanceado, y ambos balance-arriba y balanceada. En esta sección concentraremos un control de modo deslizantes para balancear el péndulo. El balance-arriba se tomará el algoritmo de los experimentos de Widjaja (1994) directamente. Primeros trataremos de estabilizar el sistema tal que el péndulo este en la posición inestable vertical $\mathbf{q}_1 = 0$ y deja que la base esté a una posición arbitraria fija. Entonces el método de diseño se generalizará para manejar ambos el péndulo y la base rotatoria al punto de equilibrio $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = 0$ y lo mantiene allí.

4.4.1 Control del péndulo invertido

Nótese, primero, que el sistema (4.4.1) se vuelve a escribir en la forma

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_0 &= -a_p \dot{\mathbf{q}}_0 + K_p u \\ \ddot{\mathbf{q}}_1 &= -\frac{C_1}{J_1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{m_1 g l_1}{J_1} \sin \mathbf{q}_1 - \frac{K_1}{J_1} a_p + \frac{K_1}{J_1} K_p u_0\end{aligned}$$

el control u es multiplicado por coeficientes constantes. Donde $B(x)$ en este caso es una matriz constante, se necesita reducir el sistema a la forma regular una transformación lineal. tenemos

$$\mathbf{y} = \mathbf{q}_0 - \frac{C_1}{J_1} \mathbf{q}_1 \quad (4.4.2)$$

Diferenciando (4.4.2) da por resultado

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{q}}_0 - \frac{C_1}{J_1} \dot{\mathbf{q}}_1 \quad (4.4.3)$$

y las ecuaciones de movimiento en la forma regular

$$\ddot{y} = \frac{C_1}{K_1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{m_1 g l_1}{K_1} \sin \mathbf{q}_1$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 = -\frac{a_p K_1}{J_1} \dot{y} - \left(\frac{C_1}{J_1} + a_p \right) \dot{\mathbf{q}}_1 - \frac{m_1 g l_1}{J_1} \sin \mathbf{q}_1 + \frac{K_1 K_p}{J_1} u \quad (4.4.4)$$

primero considerando la parte inferior del subsistema de la forma regular (4.4.4) y tratando de estabilizar el sistema con respecto a $\mathbf{q}_1 = 0$. Si el Control discontinuo

$$u = -M \text{sign}(s)$$

Es aplicado con $s = \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{a} \mathbf{q}_1$ $\mathbf{a} > 0$ ambos $\dot{\mathbf{q}}_1 \rightarrow 0$ y $\mathbf{q}_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ el modo deslizante es forzado al plano $s=0$. Pero los ceros dinámicos del péndulo se guían por la ecuación superior de (4.4.4) son gobernados por $\ddot{y} = 0$, entonces $y \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y el sistema es inestable. Por consiguiente, la aproximación convencional de diseño (Caso 1 en la Sección 4.1) no trabaja por el sistema del péndulo si el control debe estabilizar el péndulo invertido la inestable posición vertical con una posición fija arbitraria de la base giratoria, $\mathbf{q}_0 = \text{const}$

Ahora diseñamos un controlador en modos deslizantes para el sistema basado en el procedimiento del péndulo del Caso 2 en la Sección 4.1. Considerando la ecuación superior del sistema (4.4.4). Según (4.1.6), las variables deslizantes pueden ser elegidas como

$$\frac{C_1}{J_1} \dot{\mathbf{q}}_1 - \frac{m_1 g l_1}{J_1} \sin \mathbf{q}_1 = -\mathbf{a}_1 (y + \dot{y})$$

De esta manera el sistema superior es estable:

$$\ddot{y} = -\mathbf{a}_1 (y + \dot{y})$$

Para una constante positiva \mathbf{a}_1 ambos $y \rightarrow 0$ y $\dot{y} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. sin embargo, como sigue de la ecuación superior (4.4.4), los ceros dinámicos del sistema de orden reducido

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \frac{m_1 g l_1}{C_1} \sin \mathbf{q}_1 \quad \frac{m_1 g l_1}{C_1} > 0$$

Es inestable. Caso 2 en Sección 4.1 no está aplicable; tampoco trabaja o. Ahora combinamos las ideas de los Casos 3 y 4 para estabilizar el péndulo.

Paso 1

Siguiendo la aproximación del Caso 4. introducimos una nueva inconstante

$$x = \dot{y} - \frac{C_1}{K_1} \mathbf{q}_1 \quad (4.4.5)$$

tal que el lado derecho de la ecuación del bloque superior en las ecuaciones del movimiento no dependería de la derivada respecto del tiempo de la variable de estado del bloque inferior. Entonces

$$\dot{x} = \ddot{y} - \frac{C_1}{K_1} \dot{\mathbf{q}}_1 \text{ substituyendo } \ddot{y}_1 \text{ de sistema (4.4.4) da}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{m_1 g l_1}{K_1} \sin \mathbf{q}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_1 &= -\frac{a_p K_1}{J_1} x - \frac{a_p C_1}{J_1} \mathbf{q}_1 - \left(\frac{C_1}{J_1} + a_p \right) \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{m_1 g l_1}{J_1} \sin \mathbf{q}_1 + \frac{K_1 K_p}{J_1} u\end{aligned}\quad (4.4.6)$$

El lado derecho de la ecuación superior en el sistema (4.4.6) no depende de $\dot{\mathbf{q}}$. Entonces siguiendo la aproximación del Caso 3. seleccione el control tal que la condición

$$\frac{m_1 g l_1}{K_1} \sin \mathbf{q}_1 = -\mathbf{a}_1 x \quad (4.4.7)$$

se mantiene El sistema se vuelve de un orden reducido

$$\dot{x} = -\mathbf{a}_1 x$$

Con $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ para constantes positivas \mathbf{a}_1 . Además donde x decae exponencialmente podemos concluir de las ecuaciones (4.4.7), (4.4.5) y (4.4.3) que las funciones \mathbf{q}_1 , $\dot{\mathbf{y}}$, $\dot{\mathbf{q}}_1$ y $\dot{\mathbf{q}}_0$, todas decaen exponencialmente también. Como un resultado. La dinámica deseada del sistema con $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) \rightarrow (0, 0)$ se obtiene cuando $t \rightarrow \infty$ y la base rotatoria permanece en una posición fija ($\mathbf{q}_0 = 0_1$)

paso 2

La condición (4.4.7) se mantiene la función

$$s_1 = \frac{m_1 g l_1}{K_1} \sin \mathbf{q}_1 - \mathbf{a}_1 x = 0 \quad (4.4.8)$$

la derivada de s_1 no depende del control u

$$\dot{s}_1 = \frac{m_1 g l_1}{K_1} \cos \mathbf{q}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{a}_1 \frac{m_1 g l_1}{K_1} \sin \mathbf{q}_1$$

pero decae a cero sí

$$\dot{s}_1 = -\mathbf{a} s_1$$

o

$$\frac{m_1 g l_1}{K_1} \cos \mathbf{q}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{a}_1 \frac{m_1 g l_1}{K_1} \sin \mathbf{q}_1 = -\mathbf{a} s_1 \quad (\mathbf{a} > 0)$$

Paso 3

Se satisface Esta condición si el modo deslizante se fuerza a una superficie

$$s = \dot{s}_1 + \mathbf{a} s_1 = \frac{m_1 g l_1}{K_1} \cos \mathbf{q}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{a}_1 \frac{m_1 g l_1}{K_1} \sin \mathbf{q}_1 + \mathbf{a} s_1 = 0 \quad (4.4.9)$$

El modo deslizante existe si las funciones s y \dot{s} tienen signos opuestos. Donde sólo la derivada de $\dot{\mathbf{q}}_1$ depende de la fuerza de control u , la función \dot{s} se representa en la forma

$$\dot{s} = \frac{m_1 g l_1}{K_1} \cos \mathbf{q}_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{y}_1(x, \mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) = \frac{k_p m_1 g l_1}{J_1} \cos \mathbf{q}_1 u + \tilde{\mathbf{y}}_1(x, \mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)$$

Donde \mathbf{y}_1 y $\tilde{\mathbf{y}}_1$, son funciones de sistema de estado. Note que la función $\cos \mathbf{q}_1$ es positiva para el ángulo del péndulo $-\mathbf{p}/2 < \mathbf{q}_1 < \mathbf{p}/2$. la condición de existencia del modo deslizante Se satisface sí

$$u = -u_0 \text{sign}(s) \quad (4.4.10)$$

donde

$$u_0 > \frac{J_1}{k_p m_1 g l_1 \cos \mathbf{q}_1} |\mathbf{y}'_1|_{\max}$$

Una vez que trayectorias de estado del modo deslizante son confinadas al termino de conmutación $s=0$ después de un intervalo de tiempo finito $s_1 \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. El comportamiento de la dinámica deseada del Sistema con $\mathbf{q}_0 \rightarrow \text{const}$ y $\mathbf{q}_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ esta garantizada.

4.4.2 Control del ángulo de la base y el péndulo invertido

Acabamos de mostrar que se puede estabilizar el sistema con respecto a $\mathbf{q}_1 = 0$ y $\dot{\mathbf{q}}_0 = 0$ al introducir una nueva variable x . El diseño del sistema de control para estabilizar a ambos el péndulo y la base rotatoria al punto de equilibrio $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) \rightarrow (0,0)$ se ejecuta como sigue:

Paso 1

La primera ecuación de (4.4.6) y la primera ecuación de (4.4.5) constituye un sistema similar a (4.1.11) en el método de diseño de Caso 4:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{m_1 g l_1}{K_1} \sin \mathbf{q}_1 \\ \dot{y} &= x + \frac{C_1}{K_1} \mathbf{q}_1 \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Un componente de estado \mathbf{q}_1 en el sistema (4.4.11) se maneja como control. Si el último término de la ecuación superior satisface

$$\sin \mathbf{q}_1 = -\mathbf{I}_1(x + y) \quad (4.4.12)$$

como constante I_1 , entonces el sistema es equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a_1 I_1 (x + y) \\ \dot{y} &= x + a_2 I_1 h(q_1)(x + y)\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

con constantes a_1 y a_2 , para el intervalo $-\mathbf{p} / 2 < \mathbf{q}_1 < \mathbf{p} / 2$ si son positivos entonces ellos están definidos como

$$a_1 = -\frac{m_1 g l_1}{K_1} > 0 \quad a_2 = -\frac{C_1}{K_1} > 0 \quad (K_1 < 0)\tag{4.4.14}$$

El parámetro h es una función del ángulo del péndulo \mathbf{q}_1 :

$$h(\mathbf{q}_1) = \mathbf{q}_1 / \sin \mathbf{q}_1$$

La estabilidad del sistema (4.4.13) se analiza usa la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}x^2$$

con la derivada respecto al tiempo a lo largo de las soluciones de sistema (4.4.13)

$$\dot{V} = (x + y)(\dot{x} + \dot{y}) + x\dot{x} = -(a_1 - a_2 h(\mathbf{q}_1)) I_1 (x + y)^2 + x(x + y) - a_1 I_1 x(x + y)$$

La función $\dot{V}(t)$ es semidefinida negativa,

$$\dot{V} = -(a_1 - a_2 h(\mathbf{q}_1)) I_1 (x + y)^2 \leq 0$$

Sí

$$I_1 = \frac{1}{a_1} > 0$$

Y el coeficiente

$$(a_1 - a_2 h(\mathbf{q}_1)) > 0\tag{4.4.15}$$

La función satisface las desigualdades

$$1 \leq h(\mathbf{q}_1) < \mathbf{p} / 2\tag{4.4.16}$$

Para el ángulo del péndulo $-\mathbf{p} / 2 < \mathbf{q}_1 < \mathbf{p} / 2$. Combinando las desigualdades (4.4.15) y (4.4.16) y sustituyendo a_1 y a_2 de (4.4.14), obtenemos una condición suficiente Para que el sistema del péndulo pueda estar estable como

$$\frac{m_1 g l_1}{C_1} > p/2$$

Desde un punto de vista práctico, entonces el péndulo invertido se diseña para rotar libremente alrededor de su pivote, la constante de fricción C_l es mucho menor que el torque $(m_1 g l_1)$ del péndulo mismo. Por consiguiente, la condición (4.4.15) se mantiene para un sistema de péndulo real. Además, si $\dot{V} = 0$ o $x+y=0$, sigue de (4.4.13) es tal que x es un valor constante pero $y \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ si este valor de constante es diferente de cero. Por consiguiente, el sistema (4.4.13) puede mantener la condición $\dot{V} = 0$ sólo si el punto de equilibrio $(x, y) = (0,0)$. Se muestra que el punto de equilibrio es estable asintoticamente si $x \rightarrow 0$ y $y \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por consiguiente, como sigue de (4.4.12) y (4.4.2) $(q_0, q_1) \rightarrow (0,0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, que es el objetivo del mando.

Paso 2

siguiendo el mismo procedimiento que se describió en la ecuación previa, (4.4.12) se sostiene si la función

$$s_1 = \sin q_1 + l_1(x+y) = 0$$

La función s_1 satisface la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\dot{s}_1 = l_1 s_1 \quad l_1 > 0$$

Sí

$$\cos q_1 \dot{q}_1 + l_1(\dot{x} + \dot{y}) = -l_1 s_1 \quad (4.4.17)$$

entonces en este caso

$$\dot{s}_1 = \cos q_1 \dot{q}_1 + l_1(\dot{x} + \dot{y})$$

paso 3

para satisfacer la ecuación (4.4.17), se debe forzar al modo deslizante a la superficie de conmutación

$$\dot{s} = \dot{s}_1 + l_1 s_1 = \cos q_1 \dot{q}_1 + l_1(\dot{x} + \dot{y}) + l_1 s_1 = 0$$

La derivada respecto al tiempo de la función que s es de la forma

$$\dot{s} = \cos q_1 \ddot{q}_1 + y_2(x, y, q_1, \dot{q}_1) = \frac{K_1 K_p}{J_1} \cos q_1 u + \tilde{y}_2(x, y, q_1, \dot{q}_1)$$

Donde \mathbf{y}_2 y $\tilde{\mathbf{y}}_2$, son funciones del sistema de estado. La función $\cos \mathbf{q}_1$ es positiva y parámetro K_I es negativo para el ángulo del péndulo $-\mathbf{p}/2 < \mathbf{q}_1 < \mathbf{p}/2$. La condición de existencia del modo deslizante (las funciones s y \dot{s} necesitan tener signos opuestos) se satisface sí

$$u = -u_0 \text{sign}(s) \quad (4.4.10)$$

con

$$u_0 > \frac{-J_1}{K_I K_p \cos \mathbf{q}_1} |\tilde{\mathbf{y}}_2|_{\max}$$

Después de que el modo deslizante ocurre en la superficie $s=0$, $s_1 \rightarrow 0$ y $(x, y) \rightarrow (0,0)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Finalmente, obtenemos el comportamiento de la dinámica deseada $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) \rightarrow (0,0)$ cuando $t \rightarrow \infty$

4.3 Simulación y resultados experimentales

Ambos simulación y resultados experimentales para estabilizar el sistema del péndulo rotatorio invertido se presentará en esta sección. La simulación resulta de dos sistemas del péndulo en la Figura 4.2 como se ha presentado en Sección 4.3, se pondrá énfasis especial en la colocación y la robustez para investigar la habilidad de los controladores de modos deslizantes para significantes variaciones de los parámetros de la planta.

El arreglo experimental fue implementado, y está disponible para estudiante, graduados y laboratorios de sistemas de control, en la universidad estatal de Ohio. La Figura 4.8 ilustra la configuración del arreglo de hardware completo del sistema del péndulo invertido. El control en tiempo real del sistema, principalmente consta de tres partes: el controlador, los circuitos de la interface y el sistema del péndulo. Se usan dos encoders ópticos para medir las posiciones angulares del péndulo y la base. Todos los parámetros se listan en la tabla 4.2 que están determinados por técnicas de la identificación; Widjaja (1994) da más detalles.

El sistema del péndulo invertido deja que el usuario cambie los parámetros del sistema, o agregar perturbaciones con contenedores de diversos tamaños y contenidos al final del péndulo. Un recipiente de metal y agua sujeto que más tarde se agrega el péndulo en el conjunto de experimentos. La masa del recipiente y su volumen cambian significativamente los parámetros del sistema. Y el movimiento del agua dentro del recipiente actúa como una perturbación al sistema.

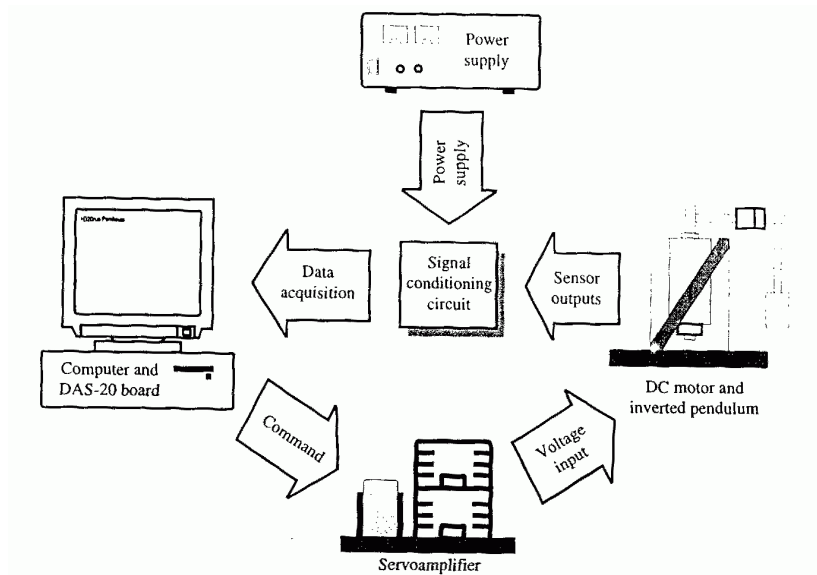


Figura 4.8 arreglo del Hardware del sistema del péndulo.

Tabla 4.2 Parámetros del sistema del péndulo rotatorio invertido

Parámetro	Parámetro
$I_l = 0.113 \text{ m}$	$m_l = 8.6184 \times 10^{-2} \text{ kg}$
$g = 9.8066 \text{ m s}^{-2}$	$J_l = 1.301 \times 10^{-3} \text{ Nm s}^2$
$a_p = 33.04$	$C_l = 2.979 \times 10^{-3} \text{ Nm s/rad}$
$K_p = 74.89$	
$K_1 = \begin{cases} -1.9 \times 10^{-3} & \text{si } -p/2 < q_1 < p/2 \\ 1.9 \times 10^{-3} & \text{de lo contrario} \end{cases}$	

La Figura 4.9 muestra los resultados de la simulación para estabilizar el péndulo y la base rotatoria usando la técnica del regulador cuadrático lineal (LQR) con

$$u = 0.7\dot{q}_0 + 1.0\ddot{q}_0 + 10.8q_1 + 0.7\dot{q}_1$$

El péndulo primero gira hacia arriba con el algoritmo balance-arriba, y entonces el LQR empieza a sobre tomar el control cuando el ángulo rotatorio del péndulo esta dentro del rango $|q_1| \leq 0.3 \text{ rad}$. Los resultados experimentales para condiciones nominales usando la técnica LQR se encuentra en Widjaja (1994) y Ordonez *et al.* (1997).

Nos enfocaremos en el comportamiento del sistema del péndulo invertido usando nuestros desarrollos previos de control en modos deslizantes. Se presentarán dos estudios del caso de los objetivos control. El Caso 1 el péndulo es estable en $q_1 = 0$ con $\dot{q}_0 = 0$. Caso 2 estabiliza el péndulo y la base rotatoria están estable con respecto al punto de equilibrio $q_1 = q_0 = 0$.

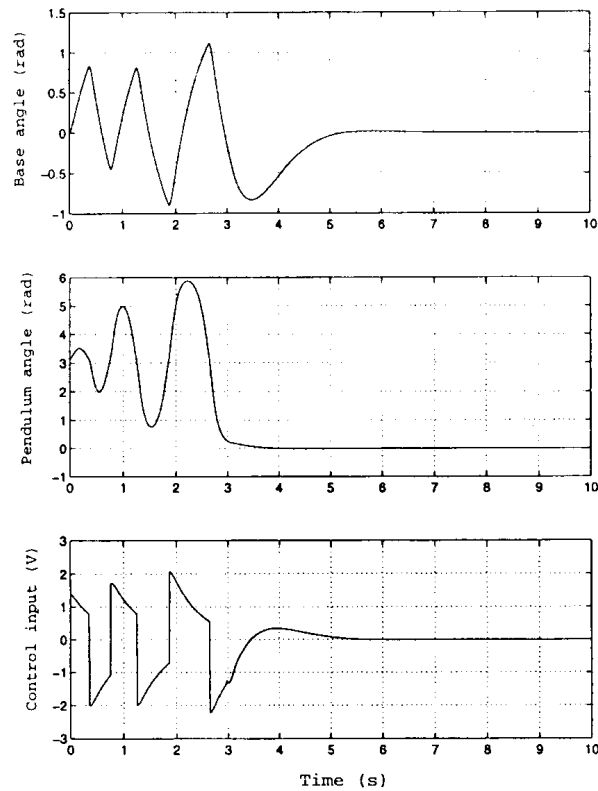


Figura 4.9 resultados de la Simulación por LQR.

4.5.1 Estabilización del péndulo invertido

Los resultados de la simulación usando las leyes control desarrolladas en esta sección se muestran en la Figura 4.10. La información requirió para calcular la entrada de control es de las ecuaciones (4.4.2), (4.4.5), (4.4.8), (4.4.9) y (4.4.10). Como se puede ver, el ángulo del péndulo se conduce a cero, y la base rotatoria al mismo tiempo permanece en una posición fija (su velocidad angular es igual a cero) con las ganancias seleccionadas de entrada $I_1 = 0.08$, $I = 100$ y $u_0 = 3$.

El control discontinuo se llevó a cabo para controlar en tiempo real el péndulo. Observamos esto debido al muestreo en tiempo discreto del sistema controla, en la práctica el modo deslizante ideal no puede llevarse a cabo. Además, como se presentó en muchas publicaciones (Utkin, 1992; Kwatny y Siu, 1987; Bartolini 1989), el chattering, que aparece como una oscilación de alta-frecuencia en la vecindad de termino deseado, puede ser por excitado por sistema dinámicos no modelados de la alta frecuencia. Para suprimir el chattering la aproximación continua de saturación (Slotine y Sastry, 1983 Burton y Zinober, 1986) Se usarán para reemplazar la conmutación ideal, en la vecindad del termino de conmutación (ver Capítulos 8 y 9). Éste da por resultado un equilibrio entre exactitud y robustez.

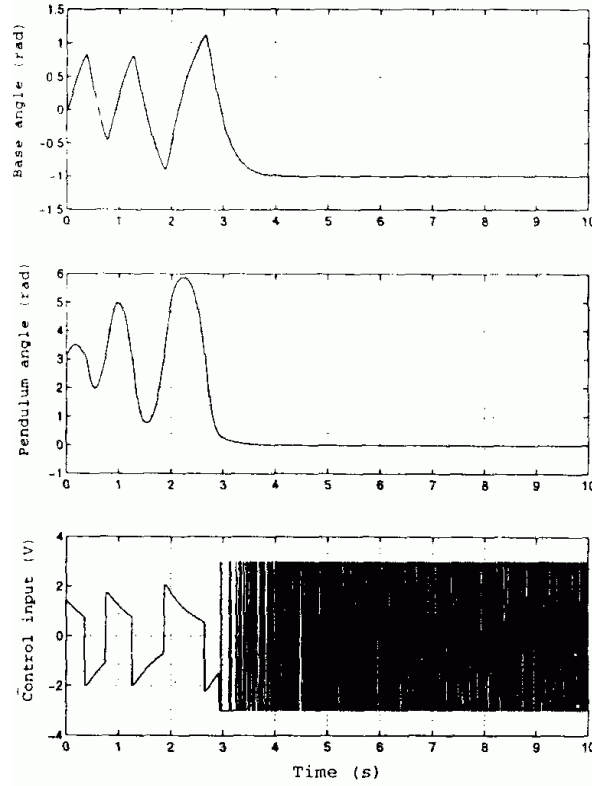


Figura 4.10 resultados de Simulación por SMC para el Caso 1 de estabilización del péndulo.

Las Figuras 4.11 a 4.13 muestra los resultados experimentales del control por modos deslizantes (SMC) para estabilizar el péndulo con diferentes cargas agregadas al final del péndulo. El tiempo de muestreo para el sistema de control es $\Delta t = 5$ ms. y es fijo para los otros resultados experimentales de las siguientes figuras. La ley de control utiliza una aproximación continua de una función senoidal, diseñada como

$$u = \begin{cases} u_0 \sin(\pi s / 2d) & |s| \leq d \\ u_0 \text{sign}(s) & |s| > d \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Donde d es la anchura del máximo aceptable en la zona continua del modo deslizante deseado ideal para el término $s=0$. Se puede mostrar fácilmente que el control discontinuo ideal es implementado si $d = 0$. El más grande el valor de d , el más pequeño anticipa la invariancia e incertidumbres del sistema y el más pequeño la cantidad de chattering del estado del sistema. Las ganancias de entrada del SMC para el sistema del péndulo se selecciona como $I_1 = 0.08$, $I = 400$ y $u_0 = 2$

La figura 4.11 muestra que, para la planta nominal, el ángulo de estabilización del péndulo esta cerca de cero. La fuerza de control de entrada, cuando esperamos, balancea arriba del péndulo en un principio, la conmutación al SMC al tiempo ≈ 1.5 s, y entonces queda en la zona d , después de 2s. $|u| < u_0 = 2.5$. Note que el sistema se estabiliza en el punto $(\dot{q}_0, q_1) = (0, 0)$ y es marginalmente estable con respecto a (q_0, q_1) ; esto explica porque la posición de la base rotatoria lentamente es desplazada (q_0 no es constante). Se obtuvieron resultados similares cuando se usó el mismo controlador para manejar el péndulo con

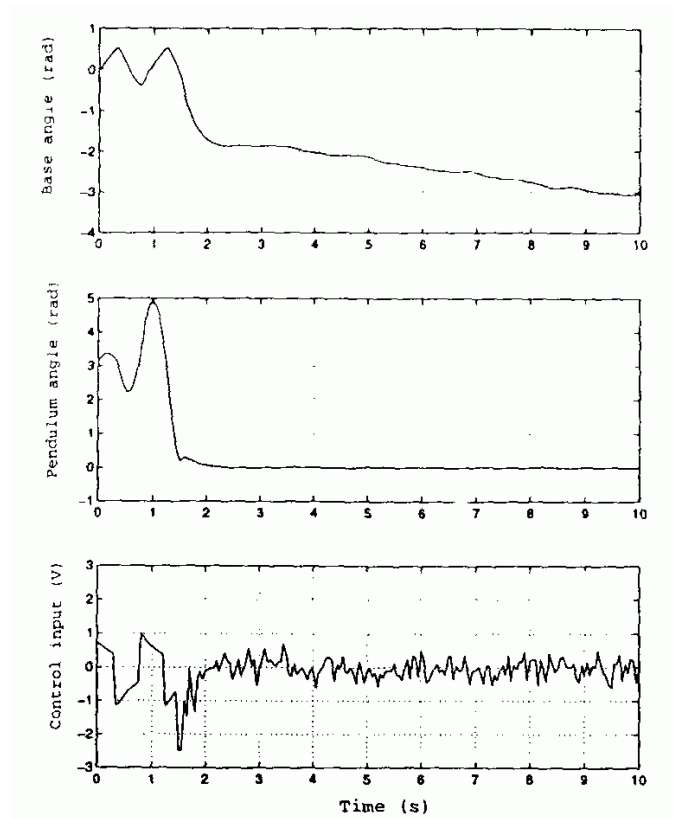


Figura 4.11 Caso 1 resultados experimentales por SMC: sin peso.

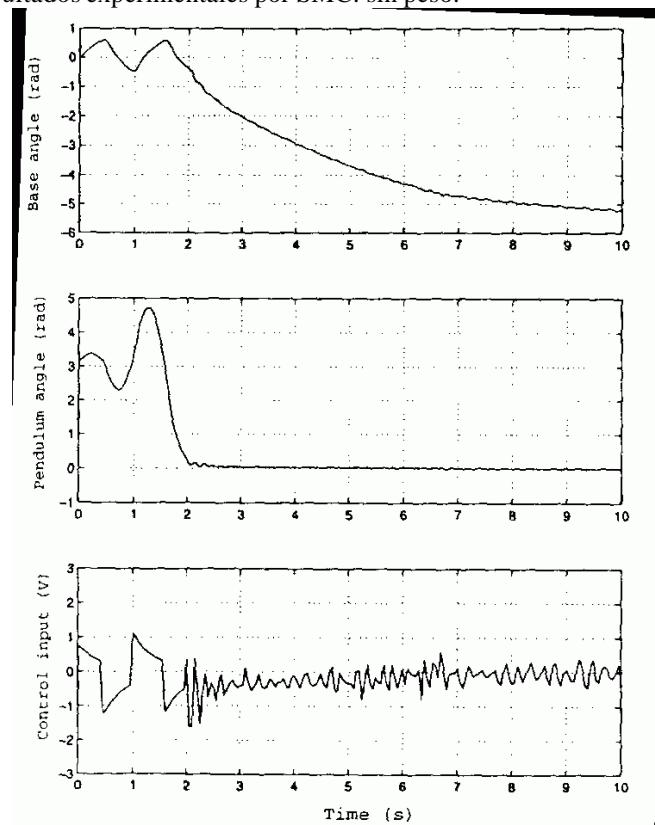


Figura 4.12 Caso 1 resultados experimentales por SMC: derrame de agua.

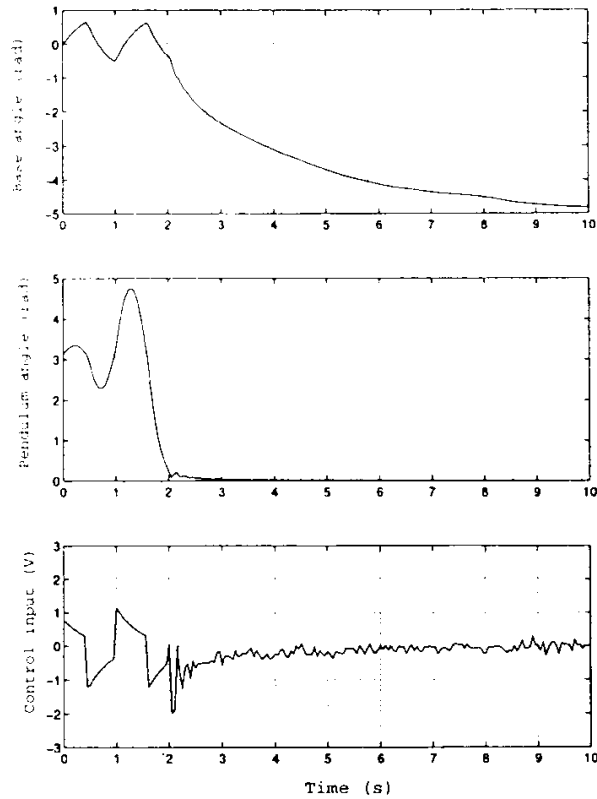


Figura 4.13 Caso 1 resultados experimentales por SMC: perno metálico

Agua (Figura 4.12) y con metal (Figura 4.13). Observamos que el controlador todavía puede manejar el equilibrio del péndulo invertido bien pues sin control de saturación en la entrada. De Hay varias observaciones interesantes: Ondas pequeñas son generadas debidos a las perturbaciones distribuidas del agua en la Figura 4.12; los valores del promedio de control de las entradas en ambos casos gradualmente convergen a cero cuando las perturbaciones se asientan al final 10 s ; y se observa una amplitud más pequeña del control de entrada en estado cuando pesos adicionales, el perno de metal, se agrega al sistema (Figura 4.13).

4.5.2 Estabilización del péndulo invertido y la base

El control por modos deslizantes para estabilizar el péndulo y la base puede ser diseñada como sigue (4.4.2), (4.4.3), (4.4.5) y (4.4.8) a (4.4.10). La simulación resulta del control (4.4.10) con las ganancias $I_1 = 0.08$, $I = 800$ y $u_0 = 3$, se muestra en Figura 4.14.

La figura 4.15 muestra que los resultados experimentales del SMC para el péndulo nominal usando el control modificado (4.5.1) con $I_1 = 0.08$, $I = 800$ y $u_0 = 2.5$. Para un valor pequeño de d , la entrada de control todavía es similar al control discontinuo de la Figura 4.10, aunque su frecuencia de conmutación es reducida considerablemente. Como resultado, existe chattering en ambas de las respuestas de estado. Los resultados por un valor más grande de d se muestran en la Figura 4.16. el control de entrada no es largamente saturado y varia entre los valores extremos ± 2.5 .

los resultados experimentales más interesantes Se describen en las figuras 4.17 y 4.18.

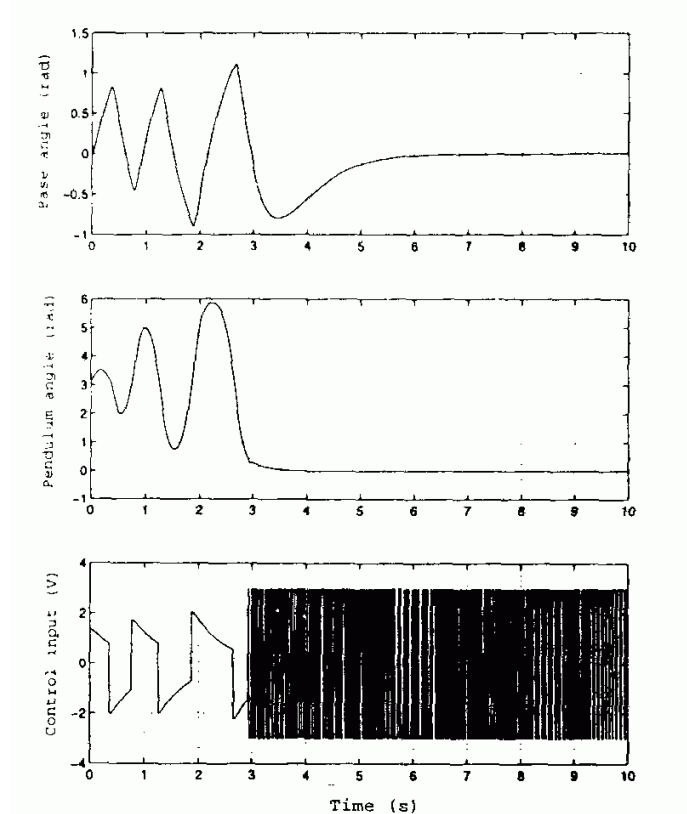


Figura 4.14 Caso 2 resultados de simulación por SMC: estabilización del péndulo y la base.

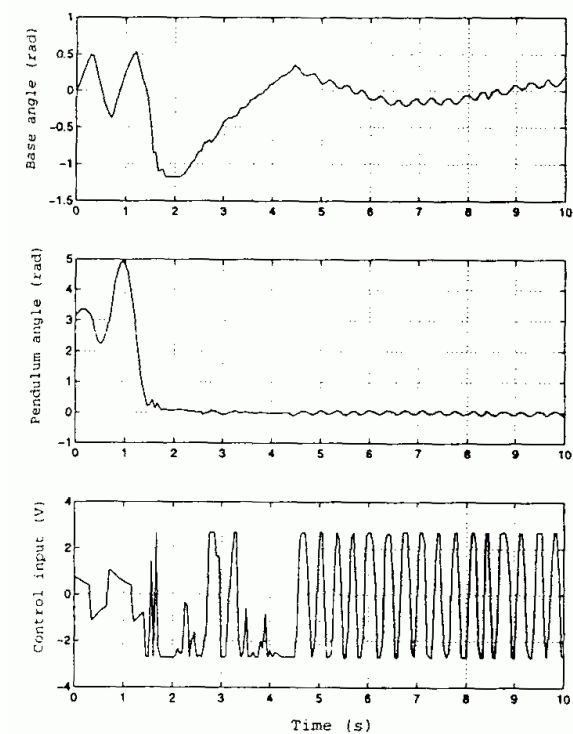


Figura 4.15 Caso 2 resultados experimentales por SMC: sin peso.

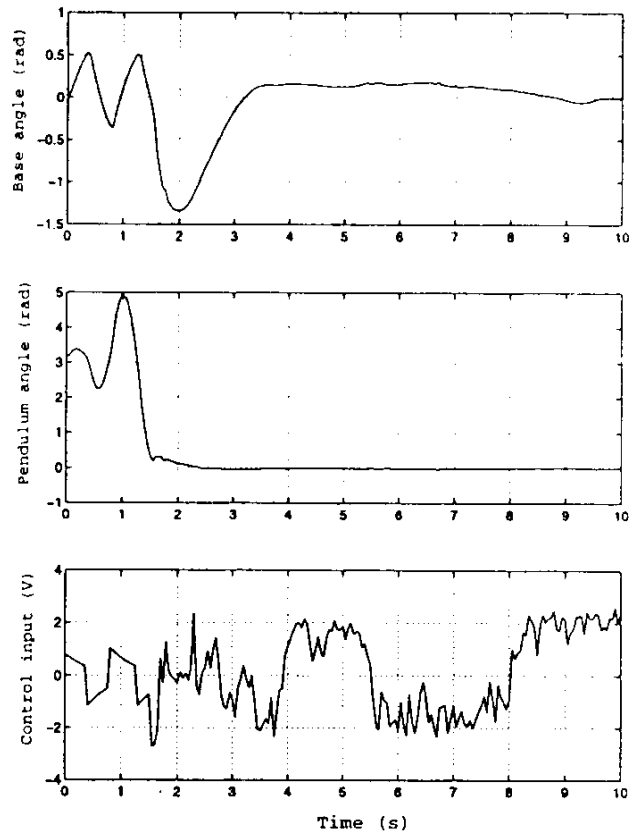


Figura 4.16 Caso 2 resultados experimentales por SMC: sin peso.

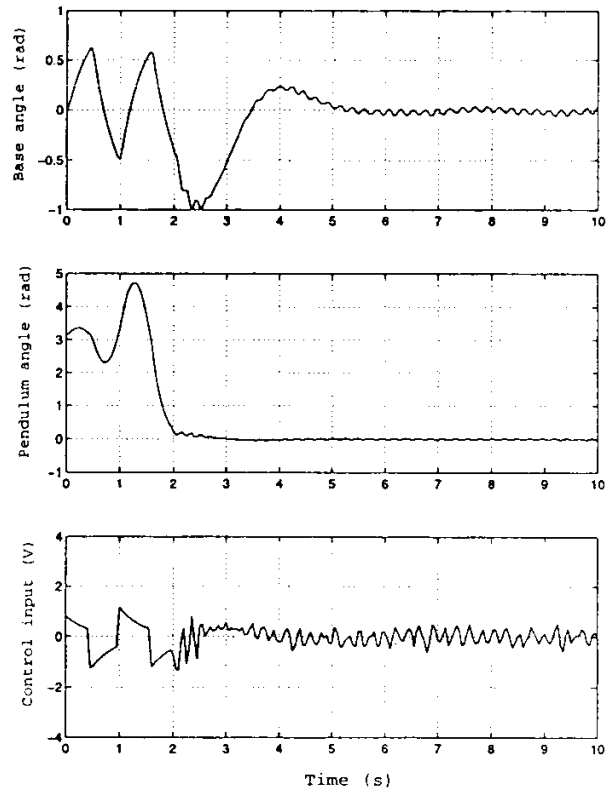
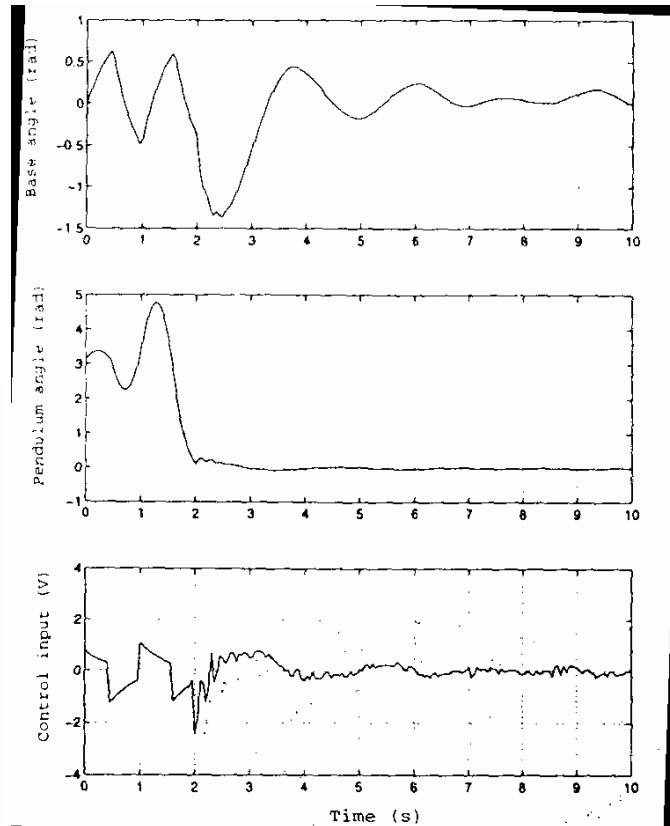


Figura 4.17 Caso 2 resultados experimentales por SMC: derrame de agua.



Figuran 4.18 Caso 2 resultados experimentales por SMC: perno de metal.

El controlador puede proporcionar convergencia del péndulo con e; perno de metal y agua usa las mismas ganancias para la entrada control. El sistema se declara estable en la vecindad del punto de equilibrio $(q_0, q_1) \rightarrow (0,0)$. Las oscilaciones de baja amplitud, similar a la Figurar 4.12 bajo el efecto del derramamiento del agua, se observan aun en la Figura 4.17, donde la entrada de control tiene un valor promedio cerca de cero. Observamos una respuesta del sistema subamortiguado en la Figura 4.18 con el péndulo con perno de metal. Comparado en la figurar 4.13, las oscilaciones del control de la entrada son relativamente grande al principio del proceso, pero disminuyen al mismo nivel después de un par de segundos, cuando ambos el péndulo y la base giratoria consiguen asentarse.

Referencias

- BARTOLINI, G., 1989, Chattering phenomena in discontinuous control systems, *International Journal on Systems Science* 20,2471-81.
- BURTON, 3. A. and ZINOBER, A. S. 1., 1986, Continuous approximation of variable structure control, *International Journal on Systems Science*, 17, 875-85.
- KWATNY, H. G. and SIU, T. L., 1987, Chattering in variable structure feedback systems, *Proceedings of the IFAC 10th Word congress*, 8, 307-14.
- LEDGERWOOD, T. and MISAWA E., 1992 Controllability and nonlinear control of rotational inverted pendulum, in Misawa, E. (Ed.) *Advances in Robust and Nonlinear Control Systems*, ASME Journal on Dynamic Systems and control, 43, 81-88.
- LUK'YANOV, A. G., 1993, Optimal nonlinear block-control method, *Proceedings of the 2nd European Control Conference*, Groningen, The Netherlands, pp. 1853-55.
- LUK'YANOV, A. G. and DODDS, S. J., 1996, Sliding mode block control of uncertain nonlinear plants, *Proceedings of the IFAC World congress*, Section F-22b, pp 241-46.
- MORI, S., NISHIHARA H. and FURUTA, K., 1976, Control of unstable mechanical system control of

- pendulum, *International Journal on Control*, 23, 673-92.
- ORDONEZ, R., ZUMBERGE J., SPOONER J. T. and PASSINO, K. M., 1997, Adaptive fuzzy control: experiments and comparative analyses *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 5, 16-88.
- SILOTINE J. J. and SASTRY, S. S., 1983, Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators, *International Journal on Control*, 38, 465-92.
- UTKIN, V.I., 1992, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Berlin: Springer-Verlag.
- WIDJAJA, M. 1994, Intelligent control for swing-up and balancing of an inverted pendulum system', master's thesis, Ohio State University Columbus OH.