Controlabilidad, Observabilidad y Detactabilidad

Controlabilidad: Definición básica

Considere el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; x(0) = x_0$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; B \in \mathbb{R}^{n\times r}$$

• <u>Controlabilidad</u>: diremos que el par (A, B) es <u>controlable</u> en intervalo $[0, T]$ si para cualquier **estado inicial** x_0 y estado **terminal** x_T, **existe una entrada de control** $u(t)$ (continua a tramos) feasible tal que la solución del sistema dinámico satisface

$$x(T) = x_T$$

Controlabilidad

Criterio de controlabilidad: El par (A, B) es controlable si y solo si **alguna** de las siguientes propiedades se cumple:

1. **Criterio 1**: el *grammiano* de controlabilidad

$$G_c(t) := \int_{\tau=0}^{t} e^{A\tau} B B^{\intercal} e^{A^{\intercal}\tau} d\tau$$

   es positivo definido para cualquier $t \in [0, \infty)$.

2. **Criterio 2**: La *matriz de controlabilidad* $\mathcal{C} := \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right]$

   tiene rango completo, o equivalentemente

$$\left\langle \begin{array}{cc} A & \operatorname{Im} B \end{array} \right\rangle := \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} \left\langle A^{i-1} B \right\rangle = \mathbb{R}^n$$

   donde $\operatorname{Im} B$ es la imagen (rango) de $B : \mathbb{R}^r \longmapsto \mathbb{R}^n$ esta definida como

$$\operatorname{Im} B := \{ y \in \mathbb{R}^n : y = Bu, \; u \in \mathbb{R}^r \}$$

Controlabilidad

3. **Criterio 3**: La *matriz de Hautus*

$$\begin{bmatrix} A-\lambda I & \vdots & B \end{bmatrix}$$

tiene rango completo por renglón para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. **Criterio 4**: Para cualquier *autovalor izquierdo* λ y *autovector* x correspondiente de la matriz A (es decir, $x^* A = \lambda x^*$), se cumple que

$$x^* B \neq 0$$

En otras palabras, todos los modos de A son controlables por B.

5. **Criterio 5**: Los *autovalores* de la matriz

$$(A + BK)$$

pueden ser asignados arbitrariamente seleccionando adecuadamente K.

Controlabilidad

Prueba. **Criterio 1:**

Necesidad. Suponga que el par (A, B) es controlable, pero para algún $t_1 \in [0, T]$ el gramiano de contrabilidad $G_c(T)$ es singular, esto es, existe un vector $x \neq 0$ tal que

$$0 = x^{\intercal} \left[\int_{\tau=0}^{t_1} e^{A\tau} B B^{\intercal} e^{A^{\intercal}\tau} d\tau \right] x = \left[\int_{\tau=0}^{t_1} x^{\intercal} e^{A\tau} B B^{\intercal} e^{A^{\intercal}\tau} x d\tau \right] = \int_{\tau=0}^{t_1} \left\| B^{\intercal} e^{A^{\intercal}\tau} x \right\|^2 d\tau$$

de modo que $x^{\intercal} e^{A\tau} B = 0$ para todo $\tau \in [0, t_1]$.

Seleccione el instante t_1 como $t_1 = T$ y $x(T) = x_T = 0$, entonces también debe cumplirse que

$$0 = x(t_1) = e^{At_1} x_0 + \int_{\tau=0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Controlabilidad

Prueba. **Criterio 1:**

Necesidad. Premultiplicando la ultima ecuación por $x^{\intercal}$ se obtiene

$$0 = x^{\intercal} x(t_1) = x^{\intercal} e^{At_1} x_0 + \int_{\tau=0}^{t_1} x^{\intercal} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau = x^{\intercal} e^{At_1} x_0$$

Seleccionando las condiciones iniciales como $x_0 = e^{-At_1} x$, se obtiene que $\|x\|^2 = 0$, o que $x = 0$ lo que contradice la suposición de que $x \neq 0$.

Suficiencia. Suponga que $G_c(t) > 0$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces $G_c(T) > 0$. Defina

$$u(t) := -B^{\intercal} e^{A^{\intercal}(T-t)} G_c^{-1}(T) \left[e^{AT} x_0 - x_T \right]$$

y sustituyendo en el sistema dinámico, obtenga

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_{\tau=0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

Controlabilidad

Prueba. **Criterio 1:**

Suficiencia. Que da como resultado

$$x(T) = e^{AT}x_0 - \left[\int_{\tau=0}^{T} e^{A(T-\tau)} B B^{\intercal} e^{A^{\intercal}(T-t)} G_c^{-1}(T) \left[e^{AT}x_0 - x_T \right] d\tau \right] =$$

$$= e^{AT}x_0 - \left[\int_{\tau=0}^{T} e^{A(T-\tau)} B B^{\intercal} e^{A^{\intercal}(T-t)} d\tau \right] G_c^{-1}(T) \left[e^{AT}x_0 - x_T \right]$$

$$\overset{T-\tau=s}{=} e^{AT}x_0 + \left[\int_{s=T}^{0} e^{As} B B^{\intercal} e^{A^{\intercal}s} ds \right] G_c^{-1}(T) \left[e^{AT}x_0 - x_T \right]$$

$$= e^{AT}x_0 - G_c(T) G_c^{-1}(T) \left[e^{AT}x_0 - x_T \right] = x_T$$

de modo que el par (A, B) es controlable.

Controlabilidad

Prueba. **Criterio 2:**

Necesidad. Suponga que $G_c(t) > 0$ para cualquier $t \in [0, T]$, pero la matriz $\mathcal{C}$ de controlabilidad no tiene rango completo, esto es existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ distinto de cero tal que

$$v^* A^i B = 0 \text{ for all } i = 0, 1..., n-1$$

Pero, de acuerdo al teorema de Cayley-Hamilton, si

$$\det(A - \lambda I) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \;\; a_0 \neq 0$$

entonces se debe cumplir que

$$a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I = 0, \;\; a_0 \neq 0$$

$$A^n = -\left(\frac{a_1}{a_0} A^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} A + \frac{a_n}{a_0} I \right)$$

Por lo tanto,

$$v^* A^n B = -\left(\frac{a_1}{a_0} v^* A^{n-1} B + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} v^* A B + \frac{a_n}{a_0} v^* B \right) = 0$$

Controlabilidad

<u>Prueba</u>. **Criterio 2:**

Necesidad. Y de la misma forma se debe cumplir

$$v^* A^{n+1} B = -\left(\frac{a_1}{a_0} v^* A^n B + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} v^* A^2 B + \frac{a_n}{a_0} v^* A B \right) = 0$$

y así consecutivamente. Así que $v^* A^i B = 0 \text{ for any } i \geq 0$.

Por otro lado, dado que $e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (At)^i$

y en vista de la última conclusión, para todo $t \geq 0$ se tiene

$$v^* e^{At} B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} v^* A^i B t^i = 0$$

lo que implica

$$0 = v^* \int_{t=0}^{t_1 \leq T} e^{At} B B^\intercal e^{A^\intercal t} dt = v^* G_c(t_1)$$

para todo $t_1 \leq T$ que es una contradicción con respecto a que $G_c(t_1)$ es no singular. Por lo tanto $\mathcal{C}$ debe tener rango completo.

Controlabilidad

Prueba. **Criterio 2:**

Suficiencia. Suponga ahora que $\mathcal{C}$ tiene rango completo, pero que $G_c(t)$ es singular para algún $t = t_1 < T$. Entonces dado que $x^\intercal e^{A\tau} B = 0$ entonces existe un vector $x^\intercal \neq 0$ tal que $x^\intercal e^{A\tau} B = 0$ para todo $\tau \in [0, t_1]$ .Tomando $t = 0$, se obtiene $x^\intercal B = 0$. Evaluando la i-ésima derivada en el punto $t = 0$ se tiene

$$0 = x^\intercal \left(\frac{d}{d\tau} e^{A\tau} \right)_{t=0} B = x^\intercal A^i B,\ i = 0, 1, ..., n-1$$

lo que implica que

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = x^\intercal \mathcal{C} = 0$$

Lo que significa que $\mathcal{C}$ no tiene rango completo. Lo que contradice la suposición inicial. Entonces, $G_c(t)$ debe ser no-singular para todo $t \in [0, T]$.

Controlabilidad

Prueba. **Criterio 3:**

Necesidad. Suponga que

$$\left[\begin{array}{ccc} A-\lambda I & \vdots & B \end{array}\right]$$

no tiene rango completo por renglón para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, esto es, existe un vector $x^* \neq 0$ tal que

$$x^* \left[\begin{array}{ccc} A-\lambda I & \vdots & B \end{array}\right] = 0$$

pero que sin embargo el sistema es controlable ($\mathcal{C}$ tiene rango completo). Esto es equivalente a

$$x^* A = \lambda x^*,\ x^* B = 0$$

lo que resultaría en $x^*\mathcal{C} = x^* \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right] =$

$$= \left[\begin{array}{ccccc} \underbrace{x^*B}_{0} & \lambda \underbrace{x^*B}_{0} & \lambda^2 \underbrace{x^*B}_{0} & \cdots & \lambda^{n-1} \underbrace{x^*B}_{0} \end{array}\right] = 0$$

lo que contradice la suposición de que $\mathcal{C}$ tiene rango completo.

Controlabilidad

Prueba. **Criterio 3:**

Suficiencia. Suponga que $\left[\begin{array}{ccc} A-\lambda I & \vdots & B \end{array}\right]$ tiene rango completo por renglón para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, pero que $\mathcal{C}$ no tiene rango completo ($x^*\mathcal{C} = 0$ para algún $x \neq 0$). Podemos representar este x como una combinación lineal de los autovectores x^{i*} de la matriz A como

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i*}, \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0 \right)$$

se tiene

$$0 = x^*\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i*}\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i*} \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i*} \left[\begin{array}{ccccc} B & \lambda_i B & \lambda_i^2 B & \cdots & \lambda_i^{n-1}B \end{array}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i*} \left[\begin{array}{ccccc} I & \lambda_i I & \lambda_i^2 I & \cdots & \lambda_i^{n-1}I \end{array}\right] B = \bar{x}^* B$$

Controlabilidad

Prueba. **Criterio 3:**

Suficiencia. Donde definimos $\bar{x}^* := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i*} \left[\begin{array}{ccccc} I & \lambda_i I & \lambda_i^2 I & \cdots & \lambda_i^{n-1} I \end{array} \right]$

Entonces, existe un vector $\tilde{x} \neq 0$ tal que $\tilde{x}^* B = 0$ y

$$\tilde{x}^* A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i*} \left[\begin{array}{ccccc} I & \lambda_i I & \lambda_i^2 I & \cdots & \lambda_i^{n-1} I \end{array} \right] A =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i*} A \left[\begin{array}{ccccc} I & \lambda_i I & \lambda_i^2 I & \cdots & \lambda_i^{n-1} I \end{array} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x^{i*} \left[\begin{array}{ccccc} I & \lambda_i I & \lambda_i^2 I & \cdots & \lambda_i^{n-1} I \end{array} \right] = \tilde{\lambda} \tilde{x}^*$$

donde $\tilde{\lambda} := \dfrac{\tilde{x}^* A \tilde{x}}{\tilde{x}^* \tilde{x}}$. Lo que es una contradicción a la suposición de que la matriz de Hautus $\left[\begin{array}{ccc} A - \tilde{\lambda} I & \vdots & B \end{array} \right]$ tiene rango completo por renglón.

Estabilicidad: definición básica

Definición. El sistema LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; x(0) = x_0$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; B \in \mathbb{R}^{n \times r}$$

o el par (A, B) se dice que estabilizable si existe una realimentación de estados $u(t) = Kx(t)$ tal que el sistema en lazo cerrado es estable (la matriz $A + BK$ es Hurwitz).

Estabilicidad

Criterio de estabilicidad. El par (A, B) es estabilizable si y solo si

1. **Criterio 1**: La matriz de Hautus

$$\left[\begin{array}{ccc} A - \lambda I & \vdots & B \end{array} \right]$$

tiene rango completo para todo $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

2. **Criterio 2**: Para toda λ y x tales que $x^* A = \lambda x^*$ y $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ se cumple que

$$x^* B \neq 0$$

***Nota**: Este criterio es una consecuencia del criterio de controlabilidad.

Observabilidad: definición básica

Para el sistema LTI suministrado por un **modelo de salida**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ t \in [0, \infty]$$
$$y(t) = Cx(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times r}$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es considerado como un **vector de salida** y $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ como una matriz de salida.

<u>Definición</u>. El sistema LTI anterior o el par (C, A) se dice que es <u>observable</u> si, para cualquier tiempo t_1, el **estado inicial** $x(0) = x_0$ puede ser **determinado** mediante la historia de la entrada $u(t)$ y de la salida $y(t)$ dentro del intervalo $[0, t_1]$.

Observabilidad

Criterio de observabilidad. El par (C,A) es observable si y solo si **alguno** de los siguientes criterios se cumple:

1. **Criterio 1**. El *grammiano de observabilidad*

$$G_o(t) := \int_{\tau=0}^{t} e^{A^\intercal \tau} C^\intercal C e^{A\tau} d\tau$$

es positivo definido para cualquier $t \in [0, \infty)$.

2. **Criterio 2**: La matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene rango completo por columna, o en otras palabras,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\left(CA^{i-1}\right) = 0$$

donde el Kernel (o espacio nulo) se define como

$$\operatorname{Ker}(A) = \mathcal{N}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

Observabilidad

3. **Criterio 3**. La matriz de Hautus $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$

   tiene <u>rango completo por columna</u> para toda $\lambda \in \mathbb{C}.$

4. **Criterio 4**. Para λ y y siendo cualquier autovalor y su correspondiente autovector ($Ay = \lambda y$) entonces se <u>cumple</u> que

$$Cy \neq 0$$

5. **Criterio 5**. Los <u>autovalores</u> de la matriz $A + LC$ pueden ser <u>asignados arbitrariamente</u> por una selección adecuada de $L.$

6. **Criterio 6**. El par $(A^{\mathsf{T}}, C^{\mathsf{T}})$ es controlable.

Observabilidad

<u>Prueba</u>. **Criterio 1:**

Necesidad. Suponga que el par (C, A) es observable, pero para algún t_1, el gramiano de observabilidad $G_0(t_1)$ es singular, esto es, existe un vector $x \neq 0$ tal que

$$0 = x^{\mathsf{T}} \left[\int_{\tau=0}^{t_1} e^{A^{\mathsf{T}}\tau} C^{\mathsf{T}} C e^{A\tau} d\tau \right] x = \left[\int_{\tau=0}^{t_1} x^{\mathsf{T}} e^{A^{\mathsf{T}}\tau} C^{\mathsf{T}} C e^{A\tau} x d\tau \right] = \int_{\tau=0}^{t_1} \left\| C e^{A\tau} x \right\|^2 d\tau$$

Así que $Ce^{A\tau}x = 0$ para todo $\tau \in [0, t_1]$. Sustituyendo en el modelo del sistema

$$x(t_1) = e^{At_1} x_0 + \int_{\tau=0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

$$y(t_1) = Cx(t_1) = Ce^{At_1} x_0 + \int_{\tau=0}^{t_1} Ce^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

Observabilidad

<u>Prueba</u>. **Criterio 1:**

Necesidad. o equivalentemente

$$v\left(t_1\right) := y\left(t_1\right) - \int\limits_{\tau=0}^{t_1} Ce^{A(t_1-\tau)}Bu\left(\tau\right)d\tau = Ce^{At_1}x_0$$

Seleccionando las condiciones iniciales $x_0 = 0$, se obtiene que $v\left(t_1\right) = 0$. Pero se tiene el mismo resultado para cualquier $x_0 = x \neq 0$ satisfaciendo $Ce^{A\tau}x = 0$, lo que significa que x_0 <u>no puede</u> ser determinado de la historia del proceso. Esto contradice la suposición de que (C, A) es observable.

Observabilidad

Prueba. **Criterio 1:**

Suficiencia. Suponga ahora que $G_o(t) > 0$ para todo $t \in [0, \infty]$. Entonces

$$0 < x^{\mathsf{T}} \left[\int_{\tau=0}^{t} e^{A^{\mathsf{T}}\tau} C^{\mathsf{T}} C e^{A\tau} d\tau \right] x = \left[\int_{\tau=0}^{t_1} x^{\mathsf{T}} e^{A^{\mathsf{T}}\tau} C^{\mathsf{T}} C e^{A\tau} x d\tau \right] = \int_{\tau=0}^{t_1} \left\| C e^{A\tau} x \right\|^2 d\tau$$

lo que implica que existe un intervalo de tiempo $\tau_0 \in [0, t]$ tal que $\left\| C e^{A\tau_0} x \right\|^2 > 0$ para cualquier $x \neq 0$. Esto significa que $C e^{A\tau_0}$ es una matriz de rango completo $\left(e^{A^{\mathsf{T}}\tau_0} C^{\mathsf{T}} C e^{A\tau_0} > 0 \right)$. Entonces

$$v(\tau_0) := y(\tau_0) - \int_{\tau=0}^{\tau_0} C e^{A(\tau_0 - \tau)} B u(\tau) d\tau = C e^{A\tau_0} x_0$$

Observabilidad

Prueba. **Criterio 1:**

Suficiencia. Y por ello

$$e^{A^\intercal \tau_0} C^\intercal v(\tau_0) = e^{A^\intercal \tau_0} C^\intercal C e^{A\tau_0} x_0$$

Así podemos calcular el estado inicial como

$$x_0 = \left[e^{A^\intercal \tau_0} C^\intercal C e^{A\tau_0} \right]^{-1} e^{A^\intercal \tau_0} C^\intercal v(\tau_0)$$

Por lo que el par (C, A) es observable.

Observabilidad

<ins>Prueba</ins>. **Criterio 2:**

Necesidad. Suponga que el par (C, A) es observable pero que la matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ no tiene rango completo por columna, esto es existe $\tilde{x} \neq 0$ tal que $\mathcal{O}\tilde{x} = 0$ ó equivalentemente

$$CA^i\tilde{x} = 0 \ \forall i = 0, 1, ..., n-1$$

Suponga que $x_0 = \tilde{x}$. Entonces por el teorema de Cayley-Hamilton

$$v(t) := y(t) - \int_{\tau=0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = Ce^{At}x_0 = C\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(At)^i x_0$$

$$= C\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(At)^i x_0 = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}\underbrace{CA^i x_0}_{0} + \sum_{i=n}^{2n-1}\frac{t^i}{i!}\underbrace{CA^i x_0}_{0} + \underbrace{...}_{0} = 0$$

lo que implica que $v(t) = Ce^{At}x_0 = 0$ y por lo tanto x_0 no puede ser determinado de $v(t) \equiv 0$, obteniéndose una contradicción.

Observabilidad

Prueba. **Criterio 2:**

Suficiencia. De la parte anterior obtuvimos que

$$v(t) := y(t) - \int_{\tau=0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = Ce^{At}x_0 = C\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(At)^i x_0$$

$$= C\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(At)^i x_0 = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}\underbrace{CA^i x_0}_{0} + \sum_{i=n}^{2n-1}\frac{t^i}{i!}\underbrace{CA^i x_0}_{0} + \underbrace{\ldots}_{0} = 0$$

de modo que

$$\tilde{v} := \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0) \\ \ddot{v}(0) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \mathcal{O}x_0$$

Observabilidad

Prueba. **Criterio 2:**

Suficiencia. Y dado que $\mathcal{O}$ tiene rango completo, entonces

$$\mathcal{O}^{\intercal}\mathcal{O} > 0$$

por lo que

$$x_0 = \left[\mathcal{O}^{\intercal}\mathcal{O}\right]^{-1} \mathcal{O}^{\intercal}\tilde{v}$$

lo que indica que x_0 podría ser únicamente definido.

Prueba. **Criterio 3-6:**

Se concluyen a partir de la dualidad del criterio 6 con respecto al criterio de controlabilidad correspondiente. Dado que el par de controlabilidad $(A^{\intercal}, C^{\intercal})$ es equivalente a la existencia de una matriz $L^{\intercal}$ tal que $A^{\intercal} + C^{\intercal}L^{\intercal}$ es estable. Pero entonces, sigue que

$$(A^{\intercal} + C^{\intercal}L^{\intercal})^{\intercal} = A + LC$$

que coincide con el criterio 6 de observabilidad.

Detectabilidad: definición básica

Para el sistema LTI suministrado por un **modelo de salida**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ x(0) = x_0, \ t \in [0, \infty]$$
$$y(t) = Cx(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ B \in \mathbb{R}^{n \times r}$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^m$ es considerado como un **vector de salida** y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ como una matriz de salida.

Definición. El sistema LTI anterior o el par (C, A) se dice que es detectable si la matriz $A + LC$ es **estable** para alguna L.

Detectabilidad

Criterio de dectabilidad. El par (C, A) es detectable si y solo si **alguno** de los siguientes criterios se cumple:

1. **Criterio 1**. La matriz de Hautus $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$

   tiene rango completo por columna para toda $Re\lambda \geq 0.$

2. **Criterio 2**. Para λ y y un autovalor y su correspondiente autovector, tal que $Ay = \lambda y$ y $Re\lambda \geq 0$ se cumple $Cy \neq 0.$

3. **Criterio 3**. Existe una matriz L tal que la matriz $A + LC$ es estable.

4. **Criterio 4**. El par $(A^{\top}, C^{\top})$ es estabilizable.

***Nota**: Este criterio es una consecuencia análoga del criterio 4 de estabilicidad.

Prueba de Popov-Belevitch-Hautus

Definición. Sea λ un autovalor de la matriz A, o equivalentemente, un **modo** del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; x(0) = x_0$$

Entonces, el modo λ se dice que es

1. **Controlable** si

$$x^* B \neq 0$$

para todo autovector izquierdo x^* de la matriz A asociada, es decir

$$x^* A = \lambda x^*, x^* \neq 0$$

2. **Observable** si

$$Cx \neq 0$$

para todo autovector derecho x de la matriz A asociada, es decir

$$Ax = \lambda x, x \neq 0$$

Prueba de Popov-Belevitch-Hautus

Afirmación. El sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \; x(0) = x_0, \; t \in [0, \infty]$$
$$y(t) = Cx(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; B \in \mathbb{R}^{n\times r}$$

es:

1. Controlable si y solo si cada modo es controlable.
2. Estabilizable si y solo si cada modo **inestable** es controlable.
3. Observable si y solo si cada modo es observable.
4. Detectable si y solo si cada modo **inestable** es observable.