Matrices estables y polinomiales

Definiciones básicas

- <u>Matriz estable</u>: una matriz A real es estable si todos sus eigenvalores pertenecen al semiplano abierto izquierdo del plano complejo:

$$C^{-} := \{z \in C | Rez < 0\}$$

Esto es $\lambda_i(A) < 0 \text{ para cualquier } i = 1, \ldots, n$

Estabilidad de Lyapunov (para ecuaciones matriciales)

<u>Teorema</u>:

1) Si la ecuación de Lyapunov

$$AP + PA^T = -Q$$

$$A, P, Q = Q^T \in R^{n \times n}$$

   es valida para alguna Q y P definidas positivas entonces A es estable.

2) La ecuación de Lyapunov tiene una solución definida positiva

$$P = P^T = \int_{t=0}^{\infty} e^{At} Q e^{A^T t} dt > 0$$

   si y solo si la matriz A es estable (Hurwitz) y

   a) O $Q = Q^T > 0$

   b) O Q tiene una estructura como $Q = BB^T$ tal que el par (A, B) es controlable.

$$rank \left[B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \ldots \vdots A^{n-1} B \right] = n$$

Estabilidad de Lyapunov (para ecuaciones matriciales)

Prueba:

1) La proposición 1 sigue directamente de la existencia de solución para la ecuación de Lyapunov, donde es necesario que ninguna suma de eigenvalores de A y P sea cero. La simetría de P se debe a que trasponiendo ambos lados

$$P^T A^T + A P^T = -Q^T 0 - Q$$

que coincide con la ecuación de Lyapunov original. Sin embargo como la solución es única implica que $P = P^T$

2) Sea λ_i un eigenvalor de A^T, es decir $A^T x_i = \lambda_i x_i$. También se tiene que

$$x_i^* A = \bar{\lambda} x_i^*$$

donde $A^* := \overline{(A^T)}$. Multiplicando por la izquierda por x_i^* y por la derecha por x_i se obtiene

$$x_i^*(AP + PA^T)x_i = \bar{\lambda}_i x_i^* P x_i + x_i^* P \lambda_i x_i^* = (\bar{\lambda}_i + \lambda_i) x_i^* P x_i = -x_i^* Q x_i < 0$$

Estabilidad de Lyapunov (para ecuaciones matriciales)

<u>Prueba</u>:

Y como, por suposición $x_i^* P x_i > 0$, se obtiene que $(\bar{\lambda}_i + \lambda_i) = 2Re\lambda_i < 0)$ lo que significa que A es estable.

3) *Suficiencia*. Si A es estable. Definiendo las matrices

$$H(t) := e^{At}Q, \quad U(t) := e^{A^T t}$$

sigue que

$$dH(t) = Ae^{At}Qdt, \quad dU(t) = e^{A^T t}A^T dt$$

Y entonces se tiene

$$\int_{t=0}^{T} d[H(t)U(t)] = H(T)U(T) - H(0)U(0) = e^{At}Qe^{A^T T} - Q$$
$$= \int_{t=0}^{T} H(t)dU(t) + \int_{t=0}^{T} dH(t)U(t)$$

Estabilidad de Lyapunov (para ecuaciones matriciales)

Prueba:

$$= \int_{t=0}^{T} e^{At} Q e^{A^T t} A^T dt + \int_{t=0}^{T} A e^{At} Q e^{A^T t} dt$$

$$= \left[\int_{t=0}^{T} e^{At} Q e^{A^T t} dt\right] A^T + A \left[\int_{t=0}^{T} e^{At} Q e^{A^T t} dt\right]$$

La estabilidad de A implica $e^{AT} R e^{A^T T} \longmapsto_{T\to\infty} 0$

Y además la integral $P := \lim_{T\to\infty} \left[\int_{t=0}^{T} e^{At} Q e^{A^T t} dt\right]$ existe dado que

$$\left\| \int_{t=0}^{T} e^{At} Q e^{A^T t} dt \right\| \leq \int_{t=0}^{T} \left\| e^{At} Q e^{A^T t} dt \right\| \leq \|Q\| \int_{t=0}^{T} \|e^{At}\|^2 dt \leq \|Q\| \int_{t=0}^{T} e^{2\lambda_{\text{máx}} A t} dt$$

$$\leq \|Q\| \int_{t=0}^{T} e^{2\alpha t} dt \leq \|Q\| \int_{t=0}^{\infty} e^{-2|\alpha| t} dt = \frac{1}{2|\alpha|} \|Q\| \leq \infty$$

Estabilidad de Lyapunov (para ecuaciones matriciales)

Prueba: donde $\lambda_{\text{máx}} \leq -\min_i Re|\lambda_i| := \alpha < 0$

Así que tomando $T \to \infty$ se obtiene que es una solución.

a) Si $Q > 0$ entonces

$$P = \int_0^\infty e^{At} Q e^{A^T t} dt \geq \lambda_{\text{mín}}(Q) \int_0^\infty e^{(A+A^T)t} dt > 0$$

b) Si $Q = BB^T$ entonces para cualquier $x \in \Re^n$

$$x^T P x = \int_0^\infty x^T e^{At} B B^T e A^T t x dt = \int_0^\infty \|B^T e^{A^T t} x\|^2 dt$$

Suponga que existe $x \neq 0$ y un intervalo (t_0, t_1) $(t_0 < t_1)$ tal que

$$\|x^T e^{At} B\|^2 = 0, \quad \forall t \in (t_0, t_1)$$

y entonces

$$x^T e^{At} A B = 0$$

Estabilidad de Lyapunov (para ecuaciones matriciales)

Prueba:

Entonces la siguiente diferenciación por t da

$$x^T e^{At} AB = 0, x^T e^{At} A^2 B = 0, \ldots, x^T e^{At} A^{(n-1)} B = 0$$

que puede ser reescrita en forma matricial como

$$x^T e^{At} \left[B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \cdots \vdots A^{(n-1)} B \right] = 0$$

$\forall t \in (t_0, t_1)$. Esto significa que $\operatorname{rank} \left[B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \cdots \vdots A^{(n-1)} B \right] < n$

que en una contradicción. Entonces si

$$\| x^T e^{At} B \|^2 > 0$$

en por lo menos un intervalo (t_0, t_1) y, por ello,

$$x^T P x = \int_{t=0}^{\infty} \| B^T e^{A^T t} x \|^2 dt \geq \int_{t=t_0}^{t_1} \| B^T e^{A^T t} x \|^2 dt > 0$$

para toda $x \neq 0$

lo que significa que $P > 0$

Estabilidad de Lyapunov (para ecuaciones matriciales)

Prueba:

Necesidad. Suponga que existe una solución positiva $P > 0$. Entonces la integral existe solo si A es estable.

a) Pero P puede ser positiva solo si $Q > 0$

b) Sea $x^{*i} \neq 0$ un modo inestable (eigenvector izquierdo de A correspondiente a un eigenvalor inestable de λ_i), esto es

$$x^{*i} A = \lambda_i x^{*i}, \quad \mathrm{Re}\lambda_i \geq 0$$

Por la relación

$$0 < x^{*i} P x^i = \int_{t=0}^{\infty} \|B^T e^{A^T t} x\|^2 dt = \int_{t=0}^{\infty} \left\| x^{*i} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (At)^l \right] B \right\|^2 dt =$$

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\| x^{*i} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} x^{*i} A^l t^l \right] B \right\|^2 dt = \int_{t=0}^{\infty} \left\| x^{*i} \left[x^{*i} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \lambda_i^l t^l \right] B \right\|^2 dt =$$

$$\int_{t=0}^{\infty} \left\| x^{*i} e^{\lambda t} B \right]^2 dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{2\lambda t} \left\| x^{*i} B \right]^2 dt$$

Estabilidad de Lyapunov (para ecuaciones matriciales)

Prueba:

Por lo tanto, debería ser

$$x^{*i}B \neq 0$$

porque si no, obtendríamos $x^{*i}Px^{i} = 0$ que significa que el par (A, B) es controlable.

FIN!!!!

Condiciones necesarias para la estabilidad matricial

¿De que se trata?

Describiremos <u>solamente</u> condiciones <u>necesarias</u> para que una matriz sea estable. Detallaremos una <u>regla simple</u> para detectar fácilmente si una matriz es inestable.

Considere el conjunto $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^{m}$ que representa los ceros (raíces) del polinomio característico de A:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

que bien puede ser reescrito como

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m)$$

Condiciones necesarias para la estabilidad matricial

Regla de Stodala: Si una matriz A es estable (o equivalentemente su polinomio característico es Hurtwitz) entonces todos los coeficientes a_i del polinomio característico deben ser estrictamente positivos

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$$a_i > 0 \, (i = 1, ..., n)$$

Corolario: Si un polinomio $p_A(\lambda)$ tiene coeficientes de signos diferentes (o algunos de ellos son cero) entonces la matriz A correspondiente es inestable.

Condiciones necesarias para la estabilidad matricial

Prueba. Como las raíces $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^{m}$ de $p_A(\lambda)$ son en general valores complejos, el polinomio característico se puede escribir como

$$p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n_r} (\lambda - \lambda_j) \cdot \prod_{k=1}^{n_c/2} (\lambda - \lambda_k)\left(\lambda - \bar{\lambda}_k\right)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_j &= -u_j, \quad j = 1, ..., n_r \\ \lambda_k &= -u_k + iv_k, \quad k = 1, ..., n_c/2 \end{aligned}$$

Así, las primeras n_r raíces son puramente reales y el resto son complejas. Por la propiedad de estabilidad de A todas las partes reales son estrictamente negativas. Por ello

$$p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n_r} (\lambda + u_j) \prod_{k=1}^{n_c/2} \left(\lambda^2 + 2u_k\lambda + u_k^2 + v_k^2\right)$$

el lado derecho es un polinomio de λ con solo coeficientes positivos, con lo que se prueba el teorema

Criterios Geométricos

¿De que se trata?

Los criterios hasta ahora han sido analíticos. Existe otra forma de análisis geométrico.

Para entender los análisis geométricos, necesitamos revisar primero el principio de variación del argumento.

Criterios Geométricos

Principio de variación del argumento.

Considere el polinomio característico $p_A(\lambda)$ de la matriz A en la forma

$$p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \left[\lambda - \lambda_j(A)\right]$$

Suponga que todas las raíces $\lambda_j(A)$ del polinomio satisfaces la condición

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) \neq 0, \quad j = 1, ..., n$$

esto permite representarlo como $p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{l} \left[\lambda - \lambda_j(A)\right] \prod_{k=1}^{r} \left[\lambda - \lambda_k(A)\right]$

donde l - the number of roots with negative (left) real parts

r - the number of roots with positive (right) real parts

Cualquier numero complejo $z \in \mathbb{C}$ puede ser representado como

$$z = |z| \, e^{i \arg z}$$

donde $\arg z$ es el ángulo formado por el vector z en el plano complejo.

Criterios Geométricos

Además, si $|z| < \infty$ y $\mathrm{Re}\, z \neq 0$, entonces la simple función compleja

$$f(j\omega) := i\omega - z = |i\omega - z|\, e^{i \arg(j\omega - z)}$$

Tiene la siguiente variación de su argumento $\overset{\infty}{\underset{\omega=-\infty}{\Delta}} \arg f(i\omega)$ (cuando ω varia de $-\infty$ a ∞)

$$\overset{\infty}{\underset{\omega=-\infty}{\Delta}} \arg f(i\omega) = \begin{cases} \pi \text{ if } \mathrm{Re}\, z < 0 \\ -\pi \text{ if } \mathrm{Re}\, z > 0 \end{cases}$$

Criterios Geométricos

Principio de variación del argumento: El polinomio

$$p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{l} [\lambda - \lambda_j(A)] \prod_{k=1}^{r} [\lambda - \lambda_k(A)]$$

satisface

$$\mathop{\Delta}_{\omega=-\infty}^{\infty} \arg p_A(i\omega) = (l-r)\pi$$

Criterios Geométricos

Prueba: La evaluación del polinomio utilizando la representación polar del numero complejo da

$$p(i\omega) = \prod_{j=1}^{l} \left[\lambda - \lambda_j(A)\right] \prod_{k=1}^{r} \left[\lambda - \lambda_k(A)\right] =$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\left|i\omega - \lambda_j(A)\right|\right) \exp i \left(\sum_{j=1}^{l} \arg\left(i\omega - \lambda_j(A)\right) + \sum_{k=1}^{r} \arg\left(i\omega - \lambda_k(A)\right) \right)$$

Entonces

$$\arg p_A(i\omega) = \sum_{j=1}^{l} \arg\left(i\omega - \lambda_j(A)\right) + \sum_{k=1}^{r} \arg\left(i\omega - \lambda_k(A)\right)$$

y recordando que

$$\underset{\omega=-\infty}{\overset{\infty}{\Delta}} \arg f(i\omega) = \begin{cases} \pi \text{ if } \operatorname{Re} z < 0 \\ -\pi \text{ if } \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$$

se prueba el teorema.

Criterios Geométricos

Criterio de Mikhailov: El polinomio $p_A(\lambda)$ de orden n es Hurwitz (o A es estable) si y solo si el *godograph* de $p_A(\lambda)$ con coordenadas

$$U(\omega) := \operatorname{Re} p_A(i\omega) \quad \text{(absisa)}$$

$$V(\omega) := \operatorname{Im} p_A(i\omega) \quad \text{(ordenada)}$$

Tal que

$$p_A(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$$

tiene rotación en el sentido de las manecillas del reloj (positivo) y pasa exactamente n cuadrantes del plano complejo sin cruzar el origen cuando ω varia de 0 hasta ∞

Criterios Geométricos

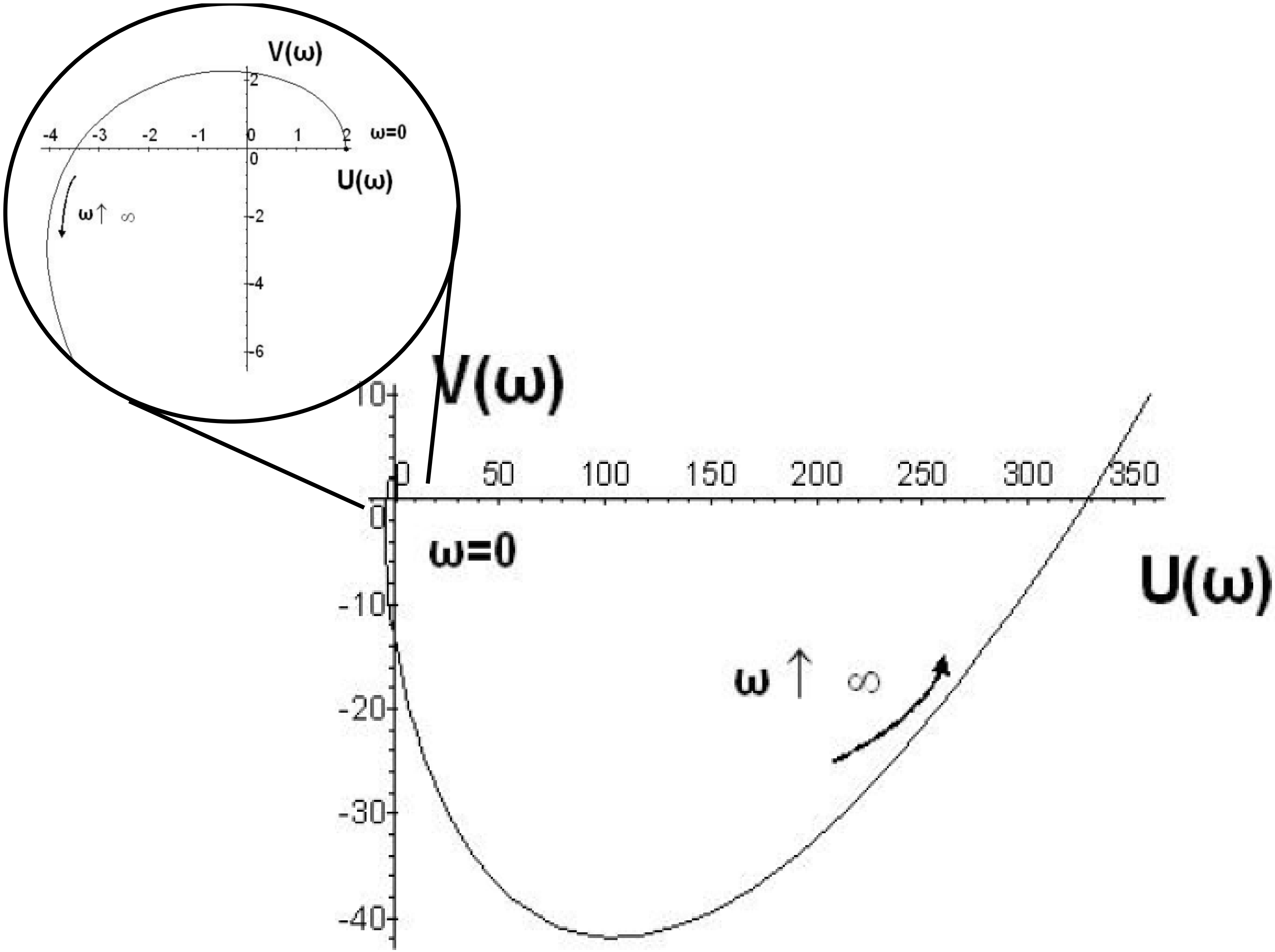
Ejemplo: Dado el polinomio característico

$$p_A(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 10\lambda^3 + 11\lambda^2 + 7\lambda + 2$$

tomamos $\lambda = j\omega$ y calculamos

$$p_A(i\omega) = i\omega^5 + 5\omega^4 - i10\omega^3 - 11\omega^2 + i7\omega + 2 =$$
$$[5\omega^4 - 11\omega^2 + 2] + i[\omega(\omega^4 - 10\omega^2 + 7)]$$

$$U(\omega) = 5\omega^4 - 11\omega^2 + 2$$
$$V(\omega) = \omega(\omega^4 - 10\omega^2 + 7)$$



V(ω)
U(ω)
ω=0
ω↑ ∞

Estabilidad robusta polinomial

Recuerde que:

1. La propiedad de <u>estabilidad</u> esta caracterizada por la <u>colocación</u> de las raíces de su polinomio característico.

Por ello:

1. Toda variación ΔA en la matriz A se ve reflejada en variaciones en los coeficientes $a_j \ (j = 1, ..., n)$ del polinomio característico $p_A(\lambda)$

   Denotemos a esta colección de coeficientes como

$$a := (a_1, ..., a_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$$

   y suponga que este vector pertenece a un conjunto conexo $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$ de todas las posibles variaciones de los parámetros provocados por ΔA

Estabilidad robusta polinomial

<u>Estabilidad robusta</u>: Un polinomio característico es robustamente estable si para cualquier $a \in \mathcal{A}$ las raíces del polinomio característico resultante pertenecen al lado izquierdo del plano complejo $\mathbb{C}$, esto es

$$\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0 \, (j = 1, ..., n) \;\; for\ all\ a \in \mathcal{A}.$$

<u>Definición</u>: Denotaremos como $Q_A(\omega)$ al conjunto de todos los valores del vector

$$p_A(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$$

que pertenecen a $\mathbb{C}$ bajo una $\omega \in [0, \infty)$ fija y mientras los parámetros a toman todos sus posibles valores en $\mathcal{A}$, esto es,

$$Q_A(\omega) := \{z : z = p_A(i\omega) \mid a \in \mathcal{A}\}$$

Estabilidad robusta polinomial

El criterio de estabilidad robusta polinomial

El polinomio $p_A(\lambda)$ es robustamente estable si y solo si

1. La clase $\mathcal{A}$ de polinomios $p_A(\lambda)$ contiene **por lo menos** un polinomio Hurwitz $p_A^*(\lambda)$ llamado “básico”.
2. El siguiente **principio de exclusión del cero** cumple: el conjunto $Q_A(\omega)$ no contiene al origen (punto cero), es decir

$$0 \notin Q_A(\omega)$$

Estabilidad robusta polinomial

Prueba. Como el vector $z = p_A(j\omega) \in \mathbb{C}$ depende continuamente del vector de parámetros a, entonces una “transicion” de un polinomio estable a uno inestable (al variar los coeficientes a) puede ocurrir (siempre es posible pues el conjunto $\mathcal{A}$ de paremtros es conexo) solo cuando una de sus raices cruza el eje imaginario, o en otras palabras, cuando existe una $\omega_0 \in [0, \infty)$ tal que $p_A(i\omega_0) = U(\omega_0) + iV(\omega_0) = 0$ Pero esto es equivalente a la siguiente identidad

$$U(\omega_0) = V(\omega_0) = 0$$

que significa que $0 \in Q_A(\omega)$. Evidentemente, para evitar esto es necesario y suficiente cumplir con las condiciones 1 y 2 del teorema.

Estabilidad robusta polinomial

<u>Teorema de Kharitonov</u>. Sea el conjunto $\mathcal{A}$, caracterizando una incertidumbre paramétrica, definido como

$$\mathcal{A} := \left\{ a \in \mathbb{R}^n : \ a_i^- \leq a_i \leq a_i^+ \ \ (i = 1, ...n) \right\}$$

Entonces el polinomio $p_A(\lambda)$ es robustamente estable si y solo si los siguientes **cuatro polinomios** son **estables** (Hurtwitz)

$$p_A^{(1)}(\lambda) := 1 + a_1^- \lambda + a_2^+ \lambda^2 + a_3^- \lambda^3 + a_4^+ \lambda^4 + a_5^- \lambda^5 + \cdots$$
$$p_A^{(2)}(\lambda) := 1 + a_1^+ \lambda + a_2^+ \lambda^2 + a_3^- \lambda^3 + a_4^- \lambda^4 + a_5^+ \lambda^5 + \cdots$$
$$p_A^{(3)}(\lambda) := 1 + a_1^+ \lambda + a_2^- \lambda^2 + a_3^- \lambda^3 + a_4^+ \lambda^4 + a_5^+ \lambda^5 + \cdots$$
$$p_A^{(3)}(\lambda) := 1 + a_1^- \lambda + a_2^- \lambda^2 + a_3^+ \lambda^3 + a_4^+ \lambda^4 + a_5^- \lambda^5 + \cdots$$

Estabilidad robusta polinomial

Prueba. Para cualquier $a \in \mathcal{A}$

$$U(\omega) = 1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots$$
$$V(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 \cdots$$

y por ello para cualquier $\omega \in [0, \infty)$

$$U^-(\omega) \le U(\omega) \le U^+(\omega) \;\text{ and }\; V^-(\omega) \le V(\omega) \le V^+(\omega)$$

donde

$$U^-(\omega) = 1 - a_2^+\omega^2 + a_4^-\omega^4 - \cdots$$
$$U^+(\omega) = 1 - a_2^-\omega^2 + a_4^+\omega^4 - \cdots$$

$$V^-(\omega) = a_1^-\omega - a_3^+\omega^3 + a_5^-\omega^5 \cdots$$
$$V^+(\omega) = a_1^+\omega - a_3^-\omega^3 + a_5^+\omega^5 \cdots$$

Por ello para cualquier $\omega \in [0, \infty)$ el conjunto $Q_A(\omega)$ es un rectangulo con ancho $[U^+(\omega) - U^-(\omega)]$ y alto $[V^+(\omega) - V^-(\omega)]$ y con su centro ubicado en el punto $\breve{p}_A(j\omega)$ correspondiente al polinomio estable con parámetros

$$\mathring{a} = \frac{1}{2}(a^- + a^+)$$

Estabilidad robusta polinomial

Prueba. Note que los vértices del conjunto $Q_A(\omega)$ corresponden exactamente a los cuatro polinomios de Kharitonov. Suponga que este rectángulo toca el origen con uno de sus lados. Por la propiedad monotonicamente creciente de su argumento, los vértices de dicho lado rotarán en el sentido de las manecillas del reloj y por ello se volverán no-verticales, lo que contradice el concepto previo. De esta forma aplicando el criterio de estabilidad robusta polinomial se formula el resultado.