Ecuación algebraica de Riccati

Definiciones básicas

- La ecuación de Riccati es

$$PA + A^{\mathsf{T}}P + Q - PBR^{-1}B^{\mathsf{T}}P = 0$$

a esta se le <u>asocia</u> una matriz de Hamilton de $2n \times 2n$ dimensión

$$H := \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{\mathsf{T}} \\ -Q & -A^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}$$

Definiciones básicas

Lema: El espectro $\sigma(H)$ del conjunto de eigenvalores de H es simétrico con respecto al eje imaginario.

Prueba. Para ver que es cierto, introduzca la matriz de $2n \times 2n$

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0 \end{bmatrix}$$

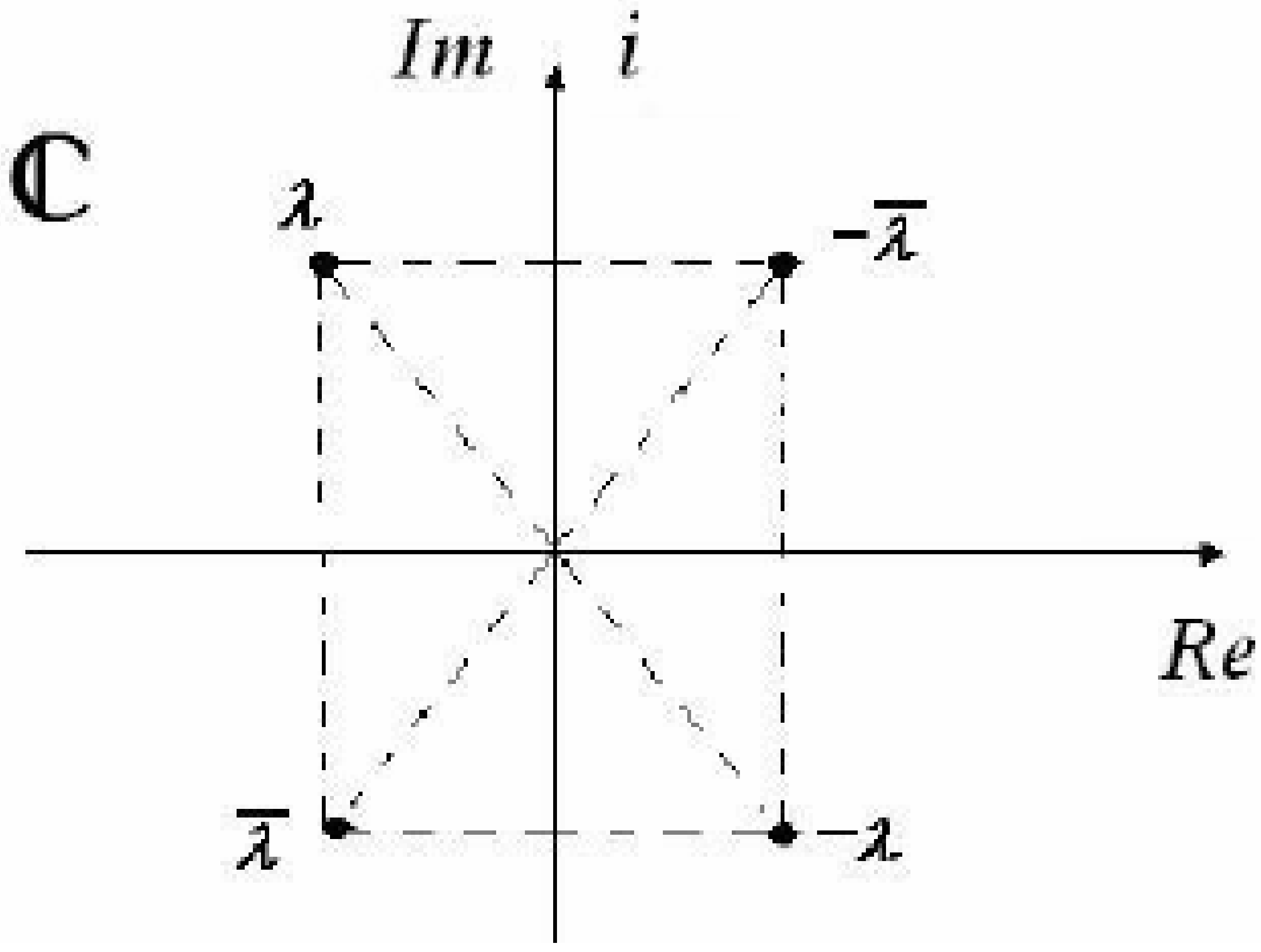
que tiene las siguientes propiedades evidentes

$$J^2 = -I_{2n\times 2n}$$
$$J^{-1} = -J$$

Así se tiene que

$$J^{-1}HJ = -JHJ = -H^{\mathsf{T}}$$

lo que implica que λ es un eigenvalor de H si y solo si $(-\bar{\lambda})$ tambien lo es.


Im
i
ℂ
λ
−λ̄
Re
λ̄
−λ

Todas las soluciones a la ecuación de Riccati

Veremos las características constitutivas de distintos tipos de soluciones para la *ecuación matricial de Riccati*…

Subespacios invariantes

<u>Definición</u>: Sea $A : \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}^n$ una transformación lineal (matriz), λ un eigenvalor de A y x su correspondiente eigenvector, $Ax = \lambda x$. De modo que $A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}.$

1. Decimos que el eigenvector x define un subespacio unidimensional que es <u>invariante</u> con respecto a la pre-multiplicación de A, dado que

$$A^k(\alpha x) = \lambda^k(\alpha x) \;\; k = 1, ...$$

2. De manera análoga, decimos que un subespacio $S \subset \mathbb{C}^n$ es <u>invariante</u> con respecto a la transformación A si

$$Ax \in S \;\; for \; any \; x \in S$$

$$AS \subset S$$

3. Si un eigenvalor esta repetido l veces, entonces los eigenvectores generalizados se construyen como

$$(A - \lambda_1 I)\, x_i = x_{i-1}, \;\; i = 1, ..., l,$$

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

<u>Teorema</u>: Sea $\Theta \subset \mathbb{C}^{2n}$ un subespacio n-dimensional invariante de H, esto es, si $z \in \Theta$ entonces $Hz \in \Theta$. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices complejas tales que

$$\Theta = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

lo que significa que las columnas de $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ pueden ser consideradas como una base en Θ. Si P_1 es invertible entonces

$$P = P_2 P_1^{-1}$$

es una solución a la ecuación matricial de Riccati que es independiente de una selección especifica de Θ.

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

Prueba: Como Θ es un subespacio invariante de H, existe una matriz $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$H\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\Lambda$$

De hecho, si la matriz $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ esta formada por los autovectores de H tal que

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

donde cada vector v_i satisface

$$Hv_i = \lambda_i v_i$$

donde λ_i es su correspondiente autovalor.

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

Prueba: Combinando estas expresiones

$$H\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\Lambda$$

En forma extendida tenemos

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{\mathsf{T}} \\ -Q & -A^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}\Lambda$$

y post-multiplicando por P_1^{-1}

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{\mathsf{T}} \\ -Q & -A^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ (P_2 P_1^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ (P_2 P_1^{-1}) \end{bmatrix} P_1 \Lambda P_1^{-1}$$

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

Prueba: Entonces la pre-multiplicación de la ultima ecuación por

$$\left[\, -\left(P_2 P_1^{-1}\right) \;\vdots\; I_{n\times n} \,\right]$$ implica

$$\left[\, -\left(P_2 P_1^{-1}\right) \;\vdots\; I_{n\times n} \,\right] \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{\intercal} \\ -Q & -A^{\intercal} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ \left(P_2 P_1^{-1}\right) \end{bmatrix} =$$

$$\left[\, -\left(P_2 P_1^{-1}\right) \;\vdots\; I_{n\times n} \,\right] \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^{\intercal}\left(P_2 P_1^{-1}\right) \\ -Q - A^{\intercal}\left(P_2 P_1^{-1}\right) \end{bmatrix} =$$

$$-\left(P_2 P_1^{-1}\right) A + \left(P_2 P_1^{-1}\right) BR^{-1}B^{\intercal}\left(P_2 P_1^{-1}\right) - Q - A^{\intercal}\left(P_2 P_1^{-1}\right) =$$

$$\left[\, -\left(P_2 P_1^{-1}\right) \;\vdots\; I_{n\times n} \,\right] \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ \left(P_2 P_1^{-1}\right) \end{bmatrix} P_1 \Lambda P_1^{-1} = 0$$

lo que significa que $P := P_2 P_1^{-1}$ es una solución.

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

Prueba: Sea T una matriz no singular. Entonces cualquier otra base de $\begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \end{bmatrix}$ expandiendo Θ puede ser representada como

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} P_1 T \\ P_2 T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 T^{-1} \\ \tilde{P}_2 T^{-1} \end{bmatrix}$$

y por ello

$$P = P_2 P_1^{-1} = \left(\tilde{P}_2 T^{-1}\right)\left(\tilde{P}_1 T^{-1}\right)^{-1} = \tilde{P}_2 T^{-1} T \left(\tilde{P}_1\right)^{-1} = \tilde{P}_2 \left(\tilde{P}_1\right)^{-1}$$

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

Corolario: La relación

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{\intercal} \\ -Q & -A^{\intercal} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

implica

$$AP_1 - BR^{-1}B^{\intercal}P_2 = P_1\Lambda$$

$$A - \left(BR^{-1}B^{\intercal}\right)P = P_1\Lambda P_1^{-1}$$

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

Teorema: Si $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una solución de la ecuación matricial de Riccati, entonces existen matrices $P_1, P_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$,con P_1 invertible , tal que

$$P = P_2 P_1^{-1}$$

se cumple y las columnas de $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ forman una base de Θ.

Prueba: Defina

$$\tilde{\Lambda} := A - \left(BR^{-1}B^{\intercal}\right) P$$

y pre-multiplicándola por P da

$$P\tilde{\Lambda} := PA - P\left(BR^{-1}B^{\intercal}\right) P = -Q - A^{\intercal} P$$

Estas dos relaciones pueden ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{\intercal} \\ -Q & -A^{\intercal} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ P \end{bmatrix} \tilde{\Lambda}$$

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

Prueba: y por ello, las columnas de

$$\begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ P \end{bmatrix}$$

expanden el subespacio invariante Θ y definiendo $P_1 := I_{n\times n}$ y $P_2 = P$ se completa la prueba.

Teoremas principales sobre la presentación de soluciones

Ejemplo: Encuentre la solución de la ecuación matricial de Riccati con

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ R = I_{2\times 2},\ Q = 0$$

Verifique todo lo que hemos conjeturado hasta el momento se cumpla.

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Teorema: Sea $\Theta \subset \mathbb{C}^{2n}$ un subespacio n-dimensional invariante de H, esto es, si $z \in \Theta$ entonces $Hz \in \Theta$. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices complejas tales que $\Theta = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$

Entonces la suposicion

$$\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0 \ for\ all\ i, j = 1, ..., 2n$$

donde $\lambda_i, \bar{\lambda}_j$ son los autovalores de H, implica

1. $P_1^* P_2$ es hermitiana, esto es

$$P_1^* P_2 = P_2^* P_1$$

2. Si, en adición, P_1 no es singular, la matriz $P = P_2 P_1^{-1}$ también es hermitiana, esto es

$$P^* = \left(P_2 P_1^{-1}\right)^* = P$$

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Nota. La condición

$$\lambda_i + \bar{\lambda}_j \neq 0 \ for\ all\ i, j = 1, ..., 2n$$

es equivalente a la restricción

$$\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0 \ for\ all\ i = 1, ..., 2n$$

lo que significa que H no tiene autovalores sobre el eje imaginario.

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Prueba: Como Θ es un subespacio invariante de H, entonces existe una matriz Λ tal que los *espectros* de los autovalores de Λ y H coinciden

$$\sigma(\Lambda) = \sigma(H)$$

y además

$$H \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

Premultiplicando esta ecuación por $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^* J$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^* JH \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

Recordando que $J^{-1}HJ = -JHJ = -H^{\mathsf{T}}$ entonces JH es simétrico y por lo tanto es Hermitiana (dado que H es real)

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Prueba: Dado que el lado izquierdo es Hermitiano entonces el lado derecho también debe ser hermitiano

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \Lambda = \Lambda^* \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^* J^* \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = -\Lambda^* \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

lo que implica

$$X\Lambda + \Lambda^* X = 0$$
$$X := \left(-P_1^* P_2 + P_2^* P_1\right)$$

Sin embargo, esto es una ecuación de Lyapunov que tiene una única solución $X = 0$ si $\lambda_i(\Lambda) + \bar{\lambda}_j(\Lambda) \neq 0$. Pero dado que el espectro de autovalores de Λ y H coinciden, se obtiene la prueba. Mas aún, si P_1 no es singular, entonces para $P = P_2 P_1^{-1}$

$$P^* = \left(P_2 P_1^{-1}\right)^* = \left(P_1^{-1}\right)^* P_2^* = \left(P_1^{-1}\right)^* \left(P_1^* P_2 P_1^{-1}\right) = \left(P_1^*\right)^{-1} P_1^* P_2 P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1} = P$$

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Teorema: Suponga que una matriz hamiltoniana H no tiene autovalores puramente imaginarios y $\mathcal{X}_-(H)$ y $\mathcal{X}_+(H)$ son subespacios invariantes n-dimensionales correspondientes a autovalores $\lambda_i(H)$ $(i=1,..n)$ en $\mathrm{Re}\, s < 0$ y a $\lambda_i(H)(i=n+1,..2n)$ en $\mathrm{Re}\ s > 0$, respectivamente, esto es, $\mathcal{X}_-(H)$ tiene la base

$$\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdot & v_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{1,n} & \cdot & v_{n,n} \\ v_{1,n+1} & \cdot & v_{n,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{1,2n} & \cdot & v_{n,2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \cdot & v_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{1,n} & \cdot & v_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} v_{1,n+1} & \cdot & v_{n,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{1,2n} & \cdot & v_{n,2n} \end{bmatrix}$$

Entonces P_1. es invertible, si y solo si el par (A, B) es estabilizable.

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Prueba.

Suficiencia. Supondremos que el par (A, B) es estabilizable y queremos mostrar que P_1. es no singular. De forma contraria (P_1. singular) suponga que existe un vector $x_0 \neq 0$ tal que $P_1 x_0 = 0$, entonces se tiene

$$x_0^* P_2^* \left(BR^{-1}B^\intercal\right) P_2 x_0 = \left\|R^{-1/2}B^\intercal P_2 x_0\right\|^2 = 0$$

o equivalentemente $R^{-1/2}B^\intercal P_2 x_0 = 0$ De hecho la premultiplicación de

$$H \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

por $\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ implica

$$AP_1 - \left(BR^{-1}B^\intercal\right) P_2 = P_1 \Lambda$$

donde $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ es una matriz digonal con elementos de $\operatorname{Re} s < 0$

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Prueba.

Suficiencia. Pre-multiplicando la ultima igualdad por $x_0^* P_2^*$, post-multiplicandola por x_0 y usando la simetria $P_2^* P_1 = P_1^* P_2$ se obtiene

$$x_0^* P_2^* \left[A P_1 - \left(B R^{-1} B^\intercal \right) P_2 \right] x_0 = -x_0^* P_2^* \left(B R^{-1} B^\intercal \right) P_2 x_0 = x_0^* P_2^* P_1 \Lambda x_0$$

$$= x_0^* P_1^* P_2 \Lambda x_0 = \left(P_1 x_0 \right)^* P_2 \Lambda x_0 = 0$$

que implica

$$x_0^* P_2^* \left(B R^{-1} B^\intercal \right) P_2 x_0 = \left\| R^{-1/2} B^\intercal P_2 x_0 \right\|^2 = 0$$

Por otro lado pre-multiplicando a

$$H \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

por $\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ se obtiene $-Q P_1 - A^\intercal P_2 = P_2 \Lambda$

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Prueba.

Suficiencia. y post-multiplicando la ultima expresión por x se obtiene

$$\left(-QP_1 - A^{\mathsf{T}}P_2\right)x_0 = -A^{\mathsf{T}}P_2x_0 = P_2\Lambda x_0 = \lambda_0 P_2 x_0 \qquad \lambda_0 = \frac{x_0^*\Lambda x_0}{\|x_0\|^2}$$

Esto implica

$$0 = A^{\mathsf{T}}P_2x_0 + P_2\lambda_0 x_0 = \left(A^{\mathsf{T}} + \lambda_0 I\right)P_2x_0$$

y teniendo en cuenta que $\left(BR^{-1}B^{\mathsf{T}}\right)P_2x_0 = 0$ sigue que

$$\left[\begin{array}{ccc} (A^{\mathsf{T}} + \lambda_0 I) & \vdots & (BR^{-1}B^{\mathsf{T}}) \end{array}\right]P_2x_0 = 0$$

Entonces la *estabilicidad* de (A, B) implica necesariamente que $P_2x_0 = 0$. Así que

$$\left[\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array}\right]x_0 = 0$$

y como $\left[\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array}\right]$ forma una base, tiene rango completo y se obtendría $x_0 = 0$ que es una contradicción.

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Prueba.

Necesidad. Suponga que P_1. es invertible. Anteriormente habíamos obtenido

$$AP_1 - \left(BR^{-1}B^{\intercal}\right) P_2 = P_1\Lambda$$

o equivalentemente

$$A - \left(BR^{-1}B^{\intercal}\right) P_2P_1^{-1} = P_1\Lambda P_1^{-1}$$

Como el espectro de autovalores de $P_1\Lambda P_1^{-1}$ coincide con el de Λ , sería posible concluir que la matriz

$$A_{closed} := A - \left(BR^{-1}B^{\intercal}\right) P_2P_1^{-1}$$

es estable y, por ello, el par $\left(A, BR^{-1}B^{\intercal}\right)$ es estabilizable (con $K = P_2P_1^{-1}$) . Esto significa que para todo λ y x tales que $Ax = \lambda x$ y $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ (modos inestables) se cumple

$$x^*BR^{-1}B^{\intercal} \neq 0$$

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Prueba.

Necesidad. lo que implicaría que

$$x^* B \neq 0$$

De hecho, por la contradicción, asumiendo que $x^* B = 0$, se obtendría

$$x^* B R^{-1} B^{\mathsf{T}} = 0$$

que claramente viola de nuevo la condición.

Soluciones hermitianas y simétricas

Autovalores no puramente imaginarios.

Corolario. La *estabilicidad* del par (A, B) implica que la matriz

$$A_{closed} := A - \left(BR^{-1}B^{\intercal}\right) P_2 P_1^{-1}$$

es estable (Hurwitz).

Prueba. Post-multiplicando $H \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \Lambda$ por P_1^{-1}. se tiene

$$H \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} P_1 \Lambda P_1^{-1}, P = P_2 P_1^{-1}$$

pre-multiplicando por $\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ da

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} I \\ P_2 P_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - (BR^{-1}B^{\intercal}) P \\ -Q - A^{\intercal} P \end{bmatrix} = A - (BR^{-1}B^{\intercal}) P$$

$$= A_{closed} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} P_1 \Lambda P_1^{-1} = P_1 \Lambda P_1^{-1}$$

Pero dado que $P_1 \Lambda P_1^{-1}$ es estable y por lo tanto A_{closed} también lo es.

Soluciones hermitianas y simétricas

Modos no observables.

Teorema. Asumiendo que el par (A, B) es estabilizable, la matriz hamiltoniana H

$$H := \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{\mathsf{T}} \\ -Q & -A^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}$$

no tiene autovalores puramente imaginarios si y solo si el par (C, A), con $Q = C^{\mathsf{T}}C$, no tiene ningún modo inobservable en el eje imaginario, esto es, para todo λ y $x_1 \neq 0$ tal que $Ax_1 = \lambda x_1$ con $\lambda = i\omega$, se cumple que $Cx_1 \neq 0$.

Soluciones hermitianas y simétricas

Modos no observables.

Prueba. Suponga que $\lambda = i\omega$ un autovalor y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$ su correspondiente autovector. Entonces

$$H\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 - BR^{-1}B^{\mathsf{T}}x_2 \\ -C^{\mathsf{T}}Cx_1 - A^{\mathsf{T}}x_2 \end{bmatrix} = i\omega\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega x_1 \\ i\omega x_2 \end{bmatrix}$$

después de re-acomodar, se tiene

$$(A - i\omega I)\,x_1 = BR^{-1}B^{\mathsf{T}}x_2$$
$$-\left(A^{\mathsf{T}} - i\omega I\right)x_2 = C^{\mathsf{T}}Cx_1$$

que implica

$$\left(x_2, (A - i\omega I)\,x_1\right) = \left(x_2, BR^{-1}B^{\mathsf{T}}x_2\right) = \left\|R^{-1/2}B^{\mathsf{T}}x_2\right\|$$

$$-\left(x_1, \left(A^{\mathsf{T}} - i\omega I\right)x_2\right) = -\left(\left(A - i\omega I\right)x_1, x_2\right) = \left(x_1, C^{\mathsf{T}}Cx_1\right) = \left\|Cx_1\right\|^2$$

y por ello $B^{\mathsf{T}}x_2 = 0,\ Cx_1 = 0$

Soluciones hermitianas y simétricas

Modos no observables.

Prueba. Esto indicaría que

$$\begin{aligned} (A - i\omega I)\, x_1 &= BR^{-1}B^{\mathsf{T}}x_2 = 0 \\ -\left(A^{\mathsf{T}} - i\omega I\right) x_2 &= C^{\mathsf{T}}Cx_1 = 0 \end{aligned}$$

Combinando las ultimas cuatro ecuaciones

$$x_2^* \begin{bmatrix} (A - i\omega I) & B \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (A - i\omega I) \\ C \end{bmatrix} x_1 = 0$$

Como la *estabilicidad* de (A, B) provee el rango completo para la matriz $\begin{bmatrix} (A - i\omega I) & B \end{bmatrix}$ implica que $x_2 = 0$. Así, es claro que $i\omega$ es un autovalor de H sı y solo si es un modo inosbervable de (C, A) esto es, el correspondiente $x_1 = 0$ también.

Todas las soluciones reales

<u>Teorema</u>. Sea $\Theta \subset \mathbb{C}^{2n}$ un subespacio invariante de H y sean $P_1, P_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices complejas tales que las columnas de $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$

forman una base de Θ y P_1 no es singular. Entonces $P = P_2 P_1^{-1}$ es <u>real</u> si y solo si Θ es <u>simétrico conjugado</u>, esto es si $z \in \Theta$ entonces $\bar{z} \in \Theta$.

<u>Prueba</u>.

Suficiencia. Como Θ es conjugado simétrico conjugado, entonces existe una matriz $\mathcal{N}$ no singular tal que

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \mathcal{N}$$

por ello

$$\bar{P} = \bar{P}_2 \bar{P}_1^{-1} = (P_2\mathcal{N})(P_1\mathcal{N})^{-1} = P_2\mathcal{N}\mathcal{N}^{-1}P_1^{-1} = P_2P_1^{-1} = P$$

así que P es real.

Todas las soluciones reales

Prueba.

Necesidad. Suponemos que $\bar{P} = P$. Por suposición $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y por ello

$$\mathrm{Im}\begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} = \Theta = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} I \\ \bar{P} \end{bmatrix}$$

Así que Θ es un subespacio simétrico conjugado.

Basados en este teorema, podemos concluir que para formar una base en un "subespacio invariante simetrico conjungado" es necesario usar los pares correspondientes de los "autovectores complejos simetricos conjugados" o su transformacion linear no singular que garantiza que P es real.

Soluciones no negativas

<u>Teorema</u>. La ecuación matricial de Riccati

$$PA + A^{\intercal}P + Q - PBR^{-1}B^{\intercal}P = 0$$

tiene una <u>solución única semidefinida positiva</u> $P = P^{\intercal} \geq 0$ que provee estabilidad a la matriz

$$A_{closed} := A - BR^{-1}B^{\intercal}P$$

correspondiente al sistema dinámico original

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con realimentación en lazo cerrado usando un <u>control</u> lineal

$$u = -Kx = -R^{-1}B^{\intercal}Px$$

si y solo si el par (A, B) es <u>estabilizable</u> y el par (C, A) donde

$$Q = C^{\intercal}C$$

<u>no tiene</u> modos inobservables en el eje imaginario.

Soluciones no negativas

<u>Prueba</u>. La existencia de $P = P_2 P_1^{-1}$, su simetricidad y el hecho de que sea real ya han sido probadas. Lo único faltante es probar que $P \geq 0$.

Representemos la ecuación de Riccati como

$$PA + A^{\intercal} P + Q - K^{\intercal} R K = 0$$
$$RK = B^{\intercal} P$$

Recordando que $A_{closed} := A - BR^{-1}B^{\intercal}P$, nos permite reescribir lo anterior

$$PA_{closed} + A_{closed}^{\intercal} P = -\left(Q + K^{\intercal} R K\right)$$
$$A_{closed} := A - BK,\ K = R^{-1}B^{\intercal}P$$

Como $\left(Q + K^{\intercal} R K\right) \geq 0$, por el lema de Lyapunov sigue que $P \geq 0$.

Soluciones no negativas

Ejemplo. Consideremos el siguiente sistema dinámico escalar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + bu.\\ y &= cx\end{aligned} \qquad a \neq 0,\ b = 1,\ c = 0$$

Note que este sistema es completamente inobservable. La ecuación de Riccati correspondiente es (con $R = r = 1$) es

$$2ap - p^2 = p\,(2a - p) = 0$$

que tiene soluciones $p_1 = 0,\ p_2 = 2a$. El caso $a = 0$ corresponde al caso cuando la matriz de Hamilton tiene autovalores $(0, i0)$ sobre el eje imaginario.

1) El caso $a < 0.$ Existe una solución única no negativa $p = p_1 = 0$ a la ecuación de Riccati que hace el lazo cerrado estable. De hecho

$$a_{closed} := a - p = a < 0$$

2) El caso a>0. La única solución no negativa a la ecuación de Riccati haciendo el lazo cerrado estable es $p = p_2 = 2a,$

Soluciones no negativas

Ejemplo. dado que

$$a_{closed} := a - p = -a < 0$$

Así que **la observabilidad de un sistema lineal no es necesariamente para hacer el lazo cerrado estable con una retroalimentación estática como se diseño**

Soluciones positivas definidas

Teorema. Si bajo las condiciones del teorema anterior adicionalmente el par (C, A) es observable, entonces la solución P de la ecuación de Riccati obligatoriamente es positiva definida, esto es, $P > 0$.

Prueba. Rescribamos la ecuación de Riccati como

$$PA + A^{\intercal}P - PBR^{-1}B^{\intercal}P = -Q$$

Suponga que para un vector $\tilde{x} \neq 0$ la condición $P\tilde{x} = 0$ se cumple. Entonces la pre y post multiplicación por $\tilde{x}$ y $\tilde{x}^*$ conduce a la siguiente identidad

$$0 = -\tilde{x}^* Q \tilde{x} = -\left\|C\tilde{x}\right\|^2 = 0$$

esto significa que $C\tilde{x} = 0$, o equivalentemente, $\tilde{x}$ pertenece a un subespacio inobservable. Por otro lado post-multiplicando por $\tilde{x}$ implica también que

$$PA\tilde{x} = 0$$

Soluciones positivas definidas

Prueba. Usando este hecho, pre y postmultiplicamos de igual manera ahora por $A\tilde{x}$ y por $\tilde{x}^* A^\intercal$ conduce

$$0 = -\tilde{x}^* A^\intercal Q A\tilde{x} = -\left\|CA\tilde{x}\right\|^2 = 0$$

Esto significa que $CA\tilde{x} = 0$, alternativamente, que $A\tilde{x}$ pertenece a un subespacio inobservable. También conduciría a que

$$PA^2\tilde{x} = 0$$

y de forma iterativa a que

$$CA^k\tilde{x} = 0, \;\; PA^k\tilde{x} = 0$$

Que significaría que $\mathcal{O}\tilde{x} := 0$ para $\tilde{x} \neq 0$, lo que contradice la suposición de observabilidad, por lo tanto $P > 0$.

Corolario. Si existe un vector $\tilde{x} \neq 0$ tal que $P\tilde{x} = 0$, entonces el par (C, A) es **inobservable**.

Soluciones positivas definidas

Sumario. La ecuación matricial de Riccati tiene una solución única positiva definida…

1. Si y solo si el par (A, B) es estabilizable y el par (C, A) no tiene modos neutrales inobservables (sobre el eje imaginario). Esto es

$$if\ Ax = \lambda x,\ \ \lambda = i\omega,\ then\ Cx \neq 0$$

2. Y si, en adición, el par (C, A) es observable, esto es,

$$\mathrm{rank}\mathcal{O} = n$$