Álgebra lineal

Prof: Leonid Fridman

Vectores y subespacios lineales

- Vector: Un vector en $\mathcal{R}^n$ es una n-tupla de números reales

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]'$$

- Espacio lineal: Un conjunto no vacío L de elementos $x, \; y, \; z, \; \ldots$ que satisface las siguientes condiciones:

    1. Dado $x, \; y \in L$ esta definido *univocamente* un tercer elemento $z \in L$., llamado suma de ellos y denotado por $x + y$
        1. Conmutatividad $x + y = y + x$
        2. Asociatividad $x + (y + z) = (x + y) + z$
        3. Existencia de cero $x + 0 = x$ para todo $x \in L$
        4. Existencia de elemento opuesto para todo $x \in L$ existe un elemento $-x$ tal que $x + (-x) = 0$

Vectores y subespacios lineales

2. Para cualquier numero α y cualquier $x \in L$ esta definido $\alpha x \in L$ de manera que
   1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
   2. $1 \cdot x = x.$
3. Las operaciones de adición y multiplicación están relacionadas entre si mediante
   1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$
   2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$

Ejemplos:

1) La recta numérica.
2) Espacio vectorial de n dimensiones R^n
3) Funciones continuas sobre un segmento $[a,\ b]$ $C_{[a,\ b]}$

Vectores y subespacios lineales

- Dependencia lineal: El conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ es linealmente dependiente si

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

es cierta para una colección $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de números reales no todos cero. Si, por ejemplo, α_1 es distinta de cero, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= -\frac{1}{\alpha_1}[\alpha_2 \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \mathbf{x}_3 + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m] \\ &=: \beta_2 \mathbf{x}_2 + \beta_3 \mathbf{x}_3 + \cdots + \beta_m \mathbf{x}_m \end{aligned}$$

Vectores y subespacios lineales

- Dimensión: La dimensión de un espacio es el número máximo de vectores linealmente independientes (i.e. en Rn hay maximo n vectores linealmente independientes).
- Base: Un conjunto de vectores linealmente independientes tal que cualquier vector en el espacio puede ser expresado como una combinación lineal del conjunto.

  Si $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ es una base, entonces $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{q}_1 + \alpha_2\mathbf{q}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{q}_n$

  Defina una matriz cuadrada de $n \times n$ $\mathbf{Q} := [\mathbf{q}_1 \;\; \mathbf{q}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{q}_n]$

  entonces $\mathbf{x}$ puede ser expresado como

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} =: \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}$$

  donde $\bar{\mathbf{x}} = [\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \cdots \;\; \alpha_n]'$ lo llamamos como la representación de $\mathbf{x}$ con respecto a la base $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$.

Vectores y subespacios lineales

Asociaremos a cada $\mathcal{R}^n$ la siguiente base *ortonormal*

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{i}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y con respecto a ella tenemos que

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + \cdots + x_n\mathbf{i}_n = \mathbf{I}_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{I}_n$ es la matriz identidad.

Vectores y subespacios lineales

- Subespacio o span: el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$

$$span\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \{x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k : \alpha_i \in R\}$$

- El complemento ortogonal $S^{\perp}$ de un subspacio $S \subset C^n$ se define como

$$S^{\perp} = span\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$$

donde los vectores $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ son ortonormales.

- Una matriz $A \in C^{m \times n}$ puede ser considerada como una transformación lineal

$$A : C^n \rightarrow C^m$$

Vectores y subespacios lineales

- El Kernel o espacio nulo de una transformación lineal $A : C^n \to C^m$ se define como

$$KerA = N(a) := \{x \in C^n : Ax = 0\}$$

- La imagen o rango de una transformación lineal es

$$ImA = R(A) := \{y \in C^m : y = Ax, x \in C^n\}$$

- La dimensión del subspacio $KerA = N(a)$ se conoce como el defecto de la transformación A esto es

$$defA := dimKerA$$

Vectores y subespacios lineales

- <u>Producto interno</u>: El producto interno de dos vectores $a, b \in C^{nx1}$ se denota como

$$(a, b) := a^* b =< a, b >= \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i$$

para el caso de a, b reales es equivalente

$$(a, b) := a^T b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Vectores y subespacios lineales

- Norma de vectores: Cualquier función real de $\mathbf{x}$, denotada por $||\mathbf{x}||$, es una norma si cumple las siguientes condiciones

  1. $||\mathbf{x}|| \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$ y $||\mathbf{x}|| = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
  2. $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha|\,||\mathbf{x}||$, para cualquier α real.
  3. $||\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2|| \leq ||\mathbf{x}_1|| + ||\mathbf{x}_2||$ para toda $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

  Hay normas típicas como

$$||\mathbf{x}||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad ||\mathbf{x}||_2 := \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad ||\mathbf{x}||_\infty := \max_i |x_i|$$

(norma euclidiana)

Vectores y subespacios lineales

- Vector normalizado: Si su norma euclidiana es 1. Es decir $\mathbf{x}'\mathbf{x} = 1$
- Vectores ortogonales: Dos vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son ortogonales si y solo si

$$\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2'\mathbf{x}_1 = 0.$$

Un conjunto de vectores $\mathbf{x}_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ son ortonormales si

$$\mathbf{x}_i{}'\mathbf{x}_j = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

- Algoritmo de Ortogonalización: Dado un conjunto de vectores linealmente independientes $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_m$

Vectores y subespacios lineales

• <u>Algoritmo de Ortonormalización</u>: Dado un conjunto de vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ linealmente independientes se puede obtener un conjunto ortonormal siguiendo el siguiente algoritmo:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{u}_1 := \mathbf{e}_1 & \mathbf{q}_1 := \mathbf{u}_1/||\mathbf{u}_1|| \\
\mathbf{u}_2 := \mathbf{e}_2 - (\mathbf{q}_1'\mathbf{e}_2)\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 := \mathbf{u}_2/||\mathbf{u}_2|| \\
\quad\vdots & \\
\mathbf{u}_m := \mathbf{e}_m - \sum_{k=1}^{m-1}(\mathbf{q}_k'\mathbf{e}_m)\mathbf{q}_k & \mathbf{q}_m := \mathbf{u}_m/||\mathbf{u}_m||
\end{array}
$$

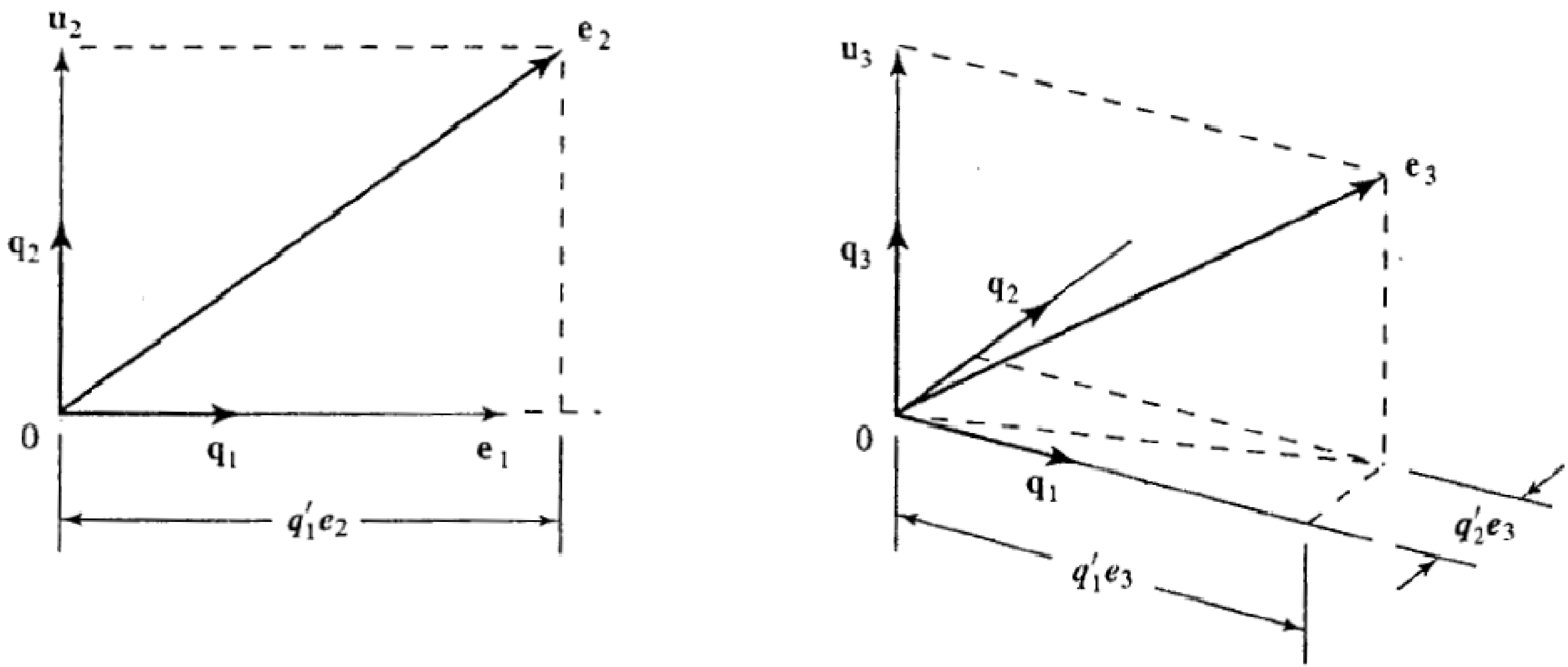
1. Normalizar $\mathbf{e}_1$..
2. El vector $(\mathbf{q}_1'\mathbf{e}_2)\mathbf{q}_1$ es la proyección de $\mathbf{e}_2$ sobre $\mathbf{q}_1$.. Al substraerlo de $\mathbf{e}_2$ queda la parte vertical $\mathbf{u}_2$ y se normaliza.

.

.

.

Vectores y subespacios lineales



Vectores y subespacios lineales

Si $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{a}_m]$ es una matriz de $n \times m$, $m \leq n$. y si todas sus columnas son ortonormales entonces

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \mathbf{a}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{a}_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_m$$

Transformaciones de similaridad

- Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$.
- Dos bases ortonormales para $\mathcal{R}^n$

$$\{\mathbf{i}_1, \ \mathbf{i}_2, \ \ldots, \ \mathbf{i}_n\} \qquad \{\mathbf{q}_1, \ \mathbf{q}_2, \ \ldots, \ \mathbf{q}_n\}$$

- La columna i de $\mathbf{A}$ tiene su representación con respecto a la base $\mathbf{i}$ es $\mathbf{A}\mathbf{i}_i$
- La columna i de $\mathbf{A}$ tiene su representación con respecto a la base $\mathbf{q}$ es $\mathbf{A}\mathbf{q}_i$

La matriz $\mathbf{A}$ tiene una representación $\bar{\mathbf{A}}$ con respecto a $\mathbf{q}$

Transformaciones de similaridad

Ejemplo. Resuelva:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones de similaridad

¿En donde se observan? Considere

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Con respecto a la base $\{\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2,\ \ldots,\ \mathbf{q}_n\}$ la ecuación se transforma en:

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}$$

Los vectores están relacionados $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1\ \ \mathbf{q}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{q}_n]$

Substituyendo en la primera ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{y}} \quad \text{or} \quad \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}$$

Donde $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \quad \text{or} \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1}$. Esta es una *transformación de similaridad* y $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ de dice que son *similares*.

Forma diagonal y forma de Jordan

¿De que se trata?

- Una matriz tiene distintas representaciones con respecto a distintas bases.
- Introduciremos una nueva base de tal forma que su representación sea diagonal o diagonal en bloque.

Forma diagonal y forma de Jordan

<u>Conceptos</u>:

- **Eigenvalor** de $\mathbf{A}$: numero λ tal que existe un $\mathbf{x}$ no cero que cumple $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- **Eigenvector** asociado a λ : Cualquier vector $\mathbf{x}$ no cero que satisfaga $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- **Polinomio característico**: $\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$
- Matrices en **forma compañera** (*companion form*)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$$

Forma diagonal y forma de Jordan

Si todos los eigenvalores son distintos: $\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$. El conjunto de eigenvectores $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ son linealmente independientes y pueden utilizarse como base.

Si $\hat{\mathbf{A}}$ es la representación de $\mathbf{A}$ en la base $\mathbf{q}_i$ entonces la primer columna de $\hat{\mathbf{A}}$ es la representación de $\mathbf{A}\mathbf{q}_1 = \lambda_1 \mathbf{q}_1$ con respecto a $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$. Así que

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_1 = \lambda_1 \mathbf{q}_1 = [\mathbf{q}_1 \ \ \mathbf{q}_2 \ \ \cdots \ \ \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

procediendo de la misma forma, obtenemos que

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Forma diagonal y forma de Jordan

Ejemplo: Encuentre una matriz diagonal similar a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma diagonal y forma de Jordan

Eigenvalores repetidos. Entonces puede que no tenga representación diagonal. Sin embargo, tiene una representación con un bloque diagonal y con una forma triangular.

Ejemplo. Considere a $\mathbf{A}$ una matriz de 4x4 con un eigenvalor λ de multiplicidad 4. Entonces $\mathbf{A}$ solo tiene un eigenvector $\mathbf{v}$ asociado a λ y se necesitan 3 vectores mas L.I para formar una base para $\mathcal{R}^4$. Los escogeremos de tal modo que

$$\mathbf{v}_4 := \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}_3 := (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_4 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}_2 := (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}_1 := (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3\mathbf{v}$$

(cadena de eigenvectores generalizados)

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{n-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

que son linealmente independientes y que por lo tanto pueden ser usados para crear una base.

Forma diagonal y forma de Jordan

De estas ecuaciones se puede obtener

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3 + \lambda\mathbf{v}_4$$

y por lo tanto la representación de A en la base $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4\}$ es

$$\mathbf{J} := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(matriz de Jordan o bloque de Jordan de orden 4)

Forma diagonal y forma de Jordan

Nulidad = 1

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Nulidad = 2

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Nulidad = 3

$$\hat{\mathbf{A}}_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Si λ_1 tiene multiplicidad 4 y λ_2 es un eigenvalor simple, entonces existe una matriz no singular $\mathbf{Q}$ tal que la matriz

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$$

asume alguna de estas formas.

Nulidad = 5

$$\hat{\mathbf{A}}_5 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Forma diagonal y forma de Jordan

Una propiedad útil de las matrices con forma de Jordan es

$$(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I})^k = \mathbf{0} \text{ for } k \geq 4.$$

Funciones de matrices cuadradas

- Potencia de una matriz cuadrada: $\mathbf{A}^k := \mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A} \quad (k \text{ terms}) \qquad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$
- Polinomios de matrices cuadradas: Polinomios como

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 2\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{I} \quad \text{or} \quad f(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})(4\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$$

Si $\mathbf{A}$ es diagonal por bloques $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$ entonces

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^k \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{A}_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & f(\mathbf{A}_2) \end{bmatrix}$$

- Considere la transformación de similaridad $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ como

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1})(\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1})\cdots(\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}^k\mathbf{Q}^{-1}$$

se tiene $f(\mathbf{A}) = \mathbf{Q}f(\hat{\mathbf{A}})\mathbf{Q}^{-1} \quad \text{or} \quad f(\hat{\mathbf{A}}) = \mathbf{Q}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{Q}$

Funciones de matrices cuadradas

- Teorema de Cayley-Hamilton: Sea

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

el polinomio característico de $\mathbf{A}$. Entonces

$$\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_1 \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{A} + \alpha_n \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

***Nota**: $\mathbf{A}^n$ puede ser escrita como una combinacion lineal de $\{\mathbf{I},\ \mathbf{A},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\}$

Funciones de matrices cuadradas

- <u>Teorema</u>: Dada una cierta $f(\lambda)$ y una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ con polinomio característico

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

donde $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$. Defina

$$h(\lambda) := \beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_{n-1} \lambda^{n-1}$$

que es un polinomio de grado $n-1$ con n coeficientes desconocidos. Estas n incógnitas serán resueltas a partir del siguiente conjunto de n ecuaciones

$$f^{(l)}(\lambda_i) = h^{(l)}(\lambda_i) \quad \text{for } l = 0, 1, \ldots, n_i - 1 \quad \text{and} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

donde

$$f^{(l)}(\lambda_i) := \left. \frac{d^l f(\lambda)}{d\lambda^l} \right|_{\lambda=\lambda_i}$$

y $h^{(l)}(\lambda_i)$ es definido de forma similar. Entonces tenemos que

$$f(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$$

y $h(\lambda)$ se dice que equivale a $f(\lambda)$ sobre el espectro de $\mathbf{A}$.

Funciones de matrices cuadradas

Ejemplo: Calcule $\mathbf{A}^{100}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Calcule $e^{\mathbf{A}_1 t}$ para

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones algebraicas lineales

Son ecuaciones del tipo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{y}$ son matrices reales dadas de tamaño $m \times n$, $m \times 1$ respectivamente y $\mathbf{x}$ es un vector de $n \times 1$ de incógnitas desconocidas.

$\boxed{m \text{ ecuaciones y } n \text{ incógnitas}}$

<u>Algunos conceptos</u>

- **Espacio expandido** por $\mathbf{A}$ (*range*): el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales originadas por las columnas de $\mathbf{A}$.
- **Rango** de $\mathbf{A}$ (*rank*): numero de columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes. $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq \min(m,\ n)$
- **Vector nulo**: $\mathbf{x}$ es un vector nulo si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- **Nulidad** de $\mathbf{A}$: numero de vectores nulos de $\mathbf{A}$ linealmente independientes $\text{Nullity}\ (\mathbf{A}) = \text{ number of columns of } \mathbf{A} - \text{ rank}\ (\mathbf{A})$

Ecuaciones algebraicas lineales

Teorema sobre existencia de solución

1. La solución $\mathbf{x}$ existe para $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ si y solo si $\mathbf{y}$ pertenece al espacio expandido por $\mathbf{A}$, o equivalentemente:

   $$\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A} \ \ \mathbf{y}])$$

   donde $[\mathbf{A} \ \ \mathbf{y}]$ es una matriz de $m \times (n+1)$. Esta condición quiere decir que $\mathbf{y}$ se puede construir a través de una combinación lineal de los vectores L.I de $\mathbf{A}$.

2. Dada $\mathbf{A}$, una solución $\mathbf{x}$ existe para $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para toda $\mathbf{y}$ si y solo si $\mathbf{A}$ tiene rango m (rango fila completo).

Ecuaciones algebraicas lineales

Parametrización de todas las soluciones:

Dada una matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$ y un vector $\mathbf{y}$ de $m \times 1$. Sea $\mathbf{x}_p$ una solución particular para $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ y $k := n - \rho(\mathbf{A})$ la nulidad de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ tiene rango n (rango completo) entonces la solución $\mathbf{x}_p$ es única.

Si $k > 0$, entonces para cada real $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, k,$ el vector

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{n}_k$$

es una solución para $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ donde $\{\mathbf{n}_1,\ \ldots,\ \mathbf{n}_k\}$ es la base para el espacio nulo de $\mathbf{A}$.

Ecuación de Lyapunov

Ecuación de Lyapunov:

$\mathbf{A}$ $n \times n$ $\quad$ $\mathbf{M}$ $n \times m$

$$\mathbf{AM} + \mathbf{MB} = \mathbf{C}$$

$\mathbf{B}$ $m \times m$ $\quad$ $\mathbf{C}$ $n \times m$

Esta ecuación puede ser escrita como un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales, si por ejemplo $n = 3$, $m = 2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}+b_{11} & a_{23} & 0 & b_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{11} & 0 & 0 & b_{21} \\ b_{12} & 0 & 0 & a_{11}+b_{22} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 & a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & b_{12} & a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

Ecuación de Lyapunov

Defina $\mathcal{A}(\mathbf{M}) := \mathbf{AM} + \mathbf{MB}$, entonces la ecuación de Lyapunov $\mathcal{A}(\mathbf{M}) = \mathbf{C}$ mapea un espacio lineal nm-dimensional en si mismo.

Un escalar η es un eigenvalor de $\mathcal{A}$ si existe una $\mathbf{M}$ no cero tal que

$$\mathcal{A}(\mathbf{M}) = \eta\mathbf{M}$$

Como $\mathcal{A}$ puede considerarse una matriz cuadrada de orden nm, tiene nm eigenvalores η_k para $k = 1, 2, \ldots, nm$. Resulta que

$$\eta_k = \lambda_i + \mu_j \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

donde λ_i son los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y μ_j son los eigenvalores de $\mathbf{B}$. Es decir, los eigenvalores de $\mathcal{A}$ son todas las posibles sumas de los eigenvalores de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. Esto es debido a que si $\mathbf{Au} = \lambda_i\mathbf{u}$ y $\mathbf{vB} = \mathbf{v}\mu_j$ (eigenvector izquierdo) entonces

$$\mathcal{A}(\mathbf{uv}) = \mathbf{Auv} + \mathbf{uvB} = \lambda_i\mathbf{uv} + \mathbf{uv}\mu_j = (\lambda_i + \mu_j)\mathbf{uv}$$

Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son cero tampoco lo es la matriz $\mathbf{uv}$. . Entonces $(\lambda_i + \mu_j)$ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$.

Ecuación de Lyapunov

Si no existen i o j tales que $\lambda_i + \mu_j = 0$, , la ecuación de Lyapunov es no singular y para cada $\mathbf{C}$, existe solo una $\mathbf{M}$ que satisface la ecuación.

Nota: Si los eigenvalores de **A** y **B** son negativas ecuación de Lyapunov siempre tiene solución única.

Formulas útil

$$\det(\mathrm{I}_m + \mathbf{AB}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{NP} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m + \mathbf{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{QP} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n + \mathbf{BA} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{N} = \det \mathbf{I}_m \cdot \det \mathbf{I}_n = 1 = \det \mathbf{Q} \qquad \det(\mathbf{NP}) = \det(\mathbf{I}_m + \mathbf{AB}) \qquad \det(\mathbf{QP}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA})$$

$$\det(\mathbf{NP}) = \det \mathbf{N} \det \mathbf{P} = \det \mathbf{P} \qquad \det(\mathbf{QP}) = \det \mathbf{Q} \det \mathbf{P} = \det \mathbf{P}$$

Nota:

$$s^n \det(s\mathbf{I}_m - \mathbf{AB}) = s^m \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{BA}) \qquad n = m \qquad \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{AB}) = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{BA})$$

<u>Formas Cuadráticas</u>

- <u>Matriz simétrica</u>: Una matriz tal que $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. Tienen dos propiedades importantes de recordar:

  ✓ Todos los eigenvalores de una matriz simetrica son reales. $(\mathbf{x}^*\mathbf{M}\mathbf{x})^* = \mathbf{x}^*\mathbf{M}^*\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\mathbf{M}'\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\mathbf{M}\mathbf{x}$

  ✓ Toda matriz simétrica se puede diagonalizar. Es decir, existe una $\mathbf{Q}$ no singular tal que

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$$

  donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con los eigenvalores reales de $\mathbf{M}$ en su diagonal.

- <u>Formas Cuadrática</u>: Una función escalar $\mathbf{x}'\mathbf{M}\mathbf{x}$ donde $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ y $\mathbf{x}$ es un vector real de $n \times 1$.

- <u>Matriz Ortogonal</u>: $\mathbf{A}$ es ortogonal si todas sus columnas son ortonormales. Obviamente $\mathbf{A}$ es no singular y cumple

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}'\mathbf{A}$$

Formas Cuadraticas

- <u>Teorema</u>: Para cada matriz real simétrica $\mathbf{M}$, existe una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tal que

$$\mathbf{M} = \mathbf{QDQ}' \quad \text{or} \quad \mathbf{D} = \mathbf{Q}'\mathbf{MQ}$$

  donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con los eigenvalores de $\mathbf{M}$ (todos reales) sobre su diagonal.

- <u>Teorema</u>: Una matriz simétrica $\mathbf{M}$ de $n \times n$ es ***definida positiva*** si y solo si una de las siguientes condiciones se cumple

  1. Cada eigenvalor de $\mathbf{M}$ es positivo (cero o positivo).
  2. Todos los menores principales de $\mathbf{M}$ son positivos (cero o positivos).
  3. Existe una matriz $\mathbf{N}$ no singular de $n \times n$ (o de $m \times n$) tal que $\mathbf{M} = \mathbf{N}'\mathbf{N}$.

  Propiedades: Para todo $\mathbf{x}$ no cero

  a) $\mathbf{M} > 0$ si $\mathbf{x}'\mathbf{Mx} > 0$ (definida positiva)

  b) $\mathbf{M} \geq 0$ si $\mathbf{x}'\mathbf{Mx} \geq 0$ (semidefinida positiva)

Descomposición en Valores Singulares

Sea $\mathbf{H}$ una matriz real. Defina $\mathbf{M} := \mathbf{H}'\mathbf{H}$. Claramente $\mathbf{M}$ es una matriz simetrica semidefinida positiva y de dimension $n \times n$. Entonces todos los eigenvalores de $\mathbf{M}$ son reales y no negativos (cero o positivos). Sea r el número de eigenvalores positivos. Entonces los eigenvalores de $\mathbf{M} := \mathbf{H}'\mathbf{H}$ pueden ser acomodados como

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \cdots \lambda_r^2 > 0 = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n$$

Sea $\bar{n} := \min(m, n)$. Al conjunto

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_{\bar{n}}$$

se le conoce como los *valores singulares* de $\mathbf{H}$.

Descomposición en Valores Singulares

<u>Teorema</u>: Toda matriz $\mathbf{H}$ de $m \times n$ puede ser transformada en la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{RSQ}'$$

Con $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{RR}' = \mathbf{I}_m$, $\mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \mathbf{QQ}' = \mathbf{I}_n$ y $\mathbf{S}$ siendo de $m \times n$ con los valores singulares de $\mathbf{H}$ sobre la diagonal

¿Por qué? Las columnas de $\mathbf{Q}$ son eigenvectores ortonormalizados de $\mathbf{H}'\mathbf{H}$ y las columas de $\mathbf{R}$ son eigenvectores ortonormalizados de $\mathbf{H}'\mathbf{H}$. Una vez que $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ y $\mathbf{Q}$ son computados, el rango de $\mathbf{H}$ es igual al número de valores singulares no cero. Si el rango de $\mathbf{H}$ es r, las primeras r columnas de $\mathbf{R}$ son una base ortonormal para el espacio rango de $\mathbf{H}$. Las ultimas $(n - r)$ columnas de $\mathbf{Q}$ son una base ortonormal para el espacio nulo (o kernel) de $\mathbf{H}$.

Normas de Matrices

La norma de $\mathbf{A}$ puede ser definida

$$||\mathbf{A}|| = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{||\mathbf{Ax}||}{||\mathbf{x}||} = \sup_{||\mathbf{x}||=1} ||\mathbf{Ax}||$$

Esta norma es definida a través de la norma de $\mathbf{x}$ y por ello es llamada *norma inducida*. Para distintas $||\mathbf{x}||$, se tienen distintas $||\mathbf{A}||$. Por ejemplo, si la norma-1 es usada, entonces

$$||\mathbf{A}||_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\right) = \text{ largest column absolute sum}$$

donde a_{ij} es el ij-elemento de $\mathbf{A}$. Si la norma euclidiana $||\mathbf{x}||_2$ es usada

$$||\mathbf{A}||_2 = \text{ largest singular value of } \mathbf{A} = (\text{largest eigenvalue of } \mathbf{A}'\mathbf{A})^{1/2}$$

O si la norma infinito $||\mathbf{x}||_\infty$ es usada, entonces

$$||\mathbf{A}||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \text{ largest row absolute sum}$$

Normas de Matrices

Propiedades:

$$||\mathbf{Ax}|| \leq ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{x}||\,.$$

$$||\mathbf{A}+\mathbf{B}|| \leq ||\mathbf{A}|| + ||\mathbf{B}||$$

$$||\mathbf{AB}|| \leq ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}||$$